

Thèse de Mathématiques, spécialité : Probabilités

**Auteur :** Pierre-Yves LOUIS

**Titre :**

Automates Cellulaires Probabilistes :  
mesures stationnaires, mesures de Gibbs associées et ergodicité.

**Résumé de la Thèse :**

Utilisés dans de nombreux domaines scientifiques, les Automates Cellulaires Probabilistes, usuellement abrégés en PCA, de l'anglais *Probabilistic Cellular Automata*, constituent, au sein des dynamiques aléatoires à temps discret, une classe de processus stochastiques markoviens à valeurs dans un espace infini  $S^G$  où  $S$  désigne un ensemble fini et  $G$  est un graphe infini. On considère ici toujours le cas où  $G = \mathbb{Z}^d$ . La particularité de ces dynamiques est l'évolution en parallèle, ou synchrone, de chacune des coordonnées ou composants élémentaires en interaction.

Nous nous intéressons dans un premier temps à l'existence et à l'unicité des mesures stationnaires pour les dynamiques PCA non dégénérées *i.e.* dont le comportement local n'est jamais déterministe, ainsi qu'à la caractérisation de ces états d'équilibre en tant que mesures gibbsiennes. Nous fondant sur les résultats de Dai Pra, Kozlov, Künsch, Lebowitz, Vasyliov *et al.*, nous précisons, pour la classe des dynamiques PCA réversibles, les relations existant entre les mesures stationnaires, les mesures réversibles et les mesures de Gibbs associées à un potentiel dont le lien avec la dynamique est explicité.

Pour une famille paramétrée de dynamiques PCA réversibles, nous démontrons l'existence d'un phénomène de transition de phase et explicitons dans ce cas le comportement de différentes mesures de Gibbs sous l'action de ces dynamiques. En particulier, nous exhibons des mesures de Gibbs non-stationnaires.

Dans un second temps, nous étudions l'ergodicité, *i.e.* la convergence vers l'équilibre des dynamiques PCA qui sont de plus attractives. Nous construisons à cet effet un couplage de ces dynamiques préservant l'ordre stochastique. En nous référant aux travaux de Martinelli et Olivieri pour les dynamiques de Glauber, nous établissons qu'en l'absence de transition de phase, dès que l'unique mesure de Gibbs vérifie une condition de faible mélange, il y a ergodicité et convergence à vitesse exponentielle vers cet unique état d'équilibre, améliorant en cela grandement les critères d'ergodicité pour les PCA existant dans la littérature.

Enfin, nous illustrons ces résultats par la réalisation de simulations numériques de certaines des dynamiques réversibles précédemment étudiées, et présentons un algorithme parallèle convergeant vers les mesures d'Ising.

**Mots clefs :**

Automates Cellulaires Probabilistes, PCA, systèmes de particules, dynamiques aléatoires markoviennes, dynamiques attractives, mesures stationnaires, mesures de Gibbs, transition de phase, ergodicité, couplage, FKG, simulation