

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

**ПРИКЛАДНАЯ
МЕХАНИКА
И ТЕХНИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА**

(Отдельный оттиск)

НОВОСИБИРСК

УДК 539.3.01

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ТОЧНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КИРША В РАМКАХ КОНТИНУУМА И ПСЕВДОКОНТИНУУМА КОССЕРА

М. А. Кулеш, В. П. Матвеев, И. Н. Шардаков

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь

В рамках несимметричной теории упругости рассмотрена задача Кирша об одностороннем растяжении пластины, ослабленной круговым отверстием, в предположении, что деформация материала описывается не только вектором перемещения, но и вектором поворота. Получено общее аналитическое решение этой задачи с использованием функций Бесселя. Проведен сравнительный анализ полученного решения с соответствующими решениями для симметричной среды и псевдосреды Коссера. Введен макропараметр, характеризующий искажение границы кругового отверстия при деформировании.

Введение. Модель среды, деформация которой описывается не только вектором перемещения u , но и вектором поворота ω , являющимися функциями координат и времени, предложена братьями Коссера в 1910 г. Среду, моделируемую таким образом, называют средой Коссера, а теорию — моментной или несимметричной теорией упругости.

В 60–70-х гг. эта теория была развита независимо несколькими исследователями [1–5]. В это же время получены первые аналитические решения плоских задач в рамках моментной теории. Однако большинство точных решений получены с использованием упрощения

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} u, \quad (1)$$

называемого стесненным вращением или псевдосредой Коссера. В этом варианте моментной теории упругости число физических констант для изотропного упругого тела сокращается с шести до четырех [6]. Кроме того, структура получаемых уравнений такова [1], что если, в частности, на поверхности упругого тела заданы перемещения, то не удастся выразить нормальную составляющую вектора поворота независимо от вектора перемещений.

Целью данной работы является построение и анализ решения задачи Кирша об одностороннем растяжении бесконечной пластины, ослабленной центральным круговым отверстием, для несимметричной среды. В работе проведен параметрический анализ точного решения и показано, что оно может быть использовано в эксперименте для идентификации физико-механических параметров континуума Коссера.

Впервые в рамках классической теории упругости указанная задача решена Киршем, позднее, иным путем, — Н. И. Мусхелишвили [7]. Обобщение решения задачи на случай псевдосреды Коссера дано в работах [6, 8, 9]. В [4] найдена концентрация напряжений вблизи кругового отверстия в рамках несимметричной теории упругости.

Следует отметить, что решение, приведенное в [4], не позволяет в полной мере проанализировать напряженно-деформированное состояние в окрестности кругового отверстия, в частности определить степень искажения отверстия при деформировании.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00240).

В данной работе в рамках общей моментной теории упругости приведено точное аналитическое решение задачи Кирша в безразмерном виде, что позволяет осуществлять его параметрический анализ.

1. Постановка задачи. Приведем основные соотношения моментной теории упругости [1]:

— уравнения равновесия

$$\nabla \cdot \tilde{\sigma} + \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\sigma}^T : \tilde{E} + \nabla \cdot \tilde{\mu} + \mathbf{Y} = \mathbf{0}; \quad (1.1)$$

— геометрические соотношения

$$\tilde{\gamma} = \nabla \mathbf{u} - \tilde{E} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \tilde{\chi} = \nabla \boldsymbol{\omega}; \quad (1.2)$$

— физические уравнения

$$\tilde{\sigma} = 2\mu\tilde{\gamma}^{(S)} + 2\alpha\tilde{\gamma}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\gamma})\tilde{e}, \quad \tilde{\mu} = 2\gamma\tilde{\chi}^{(S)} + 2\varepsilon\tilde{\chi}^{(A)} + \beta I_1(\tilde{\chi})\tilde{e}. \quad (1.3)$$

С учетом соотношений (1.1)–(1.3) уравнения равновесия для вектора перемещения \mathbf{u} и вектора поворота $\boldsymbol{\omega}$ имеют вид

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{X} &= \mathbf{0}, \\ (\beta + 2\gamma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Y} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В (1.1)–(1.4) \mathbf{X} — вектор массовых сил; \mathbf{Y} — вектор массовых моментов; \mathbf{u} — вектор перемещения; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор вращения; $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\chi}$ — тензоры деформаций и изгиба-кручения; $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\mu}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений; μ , λ — постоянные Ламе; α , β , γ , ε — физические постоянные материала в рамках моментной теории упругости; \tilde{E} — тензор Леви-Чивиты третьего ранга; $(\cdot)^{(S)}$ — операция симметрирования; $(\cdot)^{(A)}$ — операция альтернирования; $\nabla(\cdot)$ — набла-оператор; $I_1(\cdot)$ — первый инвариант тензора; \tilde{e} — единичный тензор [10]. В отличие от классической теории тензоры $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\sigma}$ являются несимметричными.

Будем рассматривать также упрощенную теорию [1], в которой принято, что вектор поворота удовлетворяет соотношению (1). Среду, описываемую таким образом, в дальнейшем будем называть псевдосредой Коссера.

Физические соотношения псевдосреды Коссера имеют вид

$$\tilde{\sigma} = 2\mu\tilde{\gamma}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\gamma})\tilde{e} - (1/2)\nabla \cdot \tilde{\mu} \cdot \tilde{E}, \quad \tilde{\mu} = 2\gamma\tilde{\chi}^{(S)} + 2\varepsilon\tilde{\chi}^{(A)} + \beta I_1(\tilde{\chi})\tilde{e}. \quad (1.5)$$

Для нахождения компонент тензоров деформаций и изгиба-кручения, как и в полной моментной постановке, используется соотношение (1.2). Однако с учетом (1.5) уравнения равновесия для псевдосреды Коссера примут вид, отличный от (1.4):

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + (1/4)(\gamma + \varepsilon) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (1.6)$$

Рассмотрим задачу об одностороннем растяжении пластины, ослабленной круговым отверстием. Пусть края кругового отверстия свободны от внешних напряжений и на бесконечности действует растягивающее усилие постоянной интенсивности p в направлении оси Ox (рис. 1).

В силу симметрии решение задачи будем искать в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) в виде разложения по гармоникам

$$\mathbf{u}(\rho, \varphi) = \{F(\rho) + U(\rho) \cos 2\varphi, V(\rho) \sin 2\varphi, 0\}, \quad \boldsymbol{\omega}(\rho, \varphi) = \{0, 0, \omega(\rho) \sin 2\varphi\}. \quad (1.7)$$

Граничные условия на бесконечности и свободном от нагрузки контуре отверстия имеют вид

$$\mathbf{n}_1 \cdot \tilde{\sigma} \Big|_{\rho=R_0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n}_1 \cdot \tilde{\mu} \Big|_{\rho=R_0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n}_2 \cdot \tilde{\sigma} \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = p, \quad \mathbf{n}_2 \cdot \tilde{\mu} \Big|_{\rho \rightarrow \infty} = \mathbf{0},$$

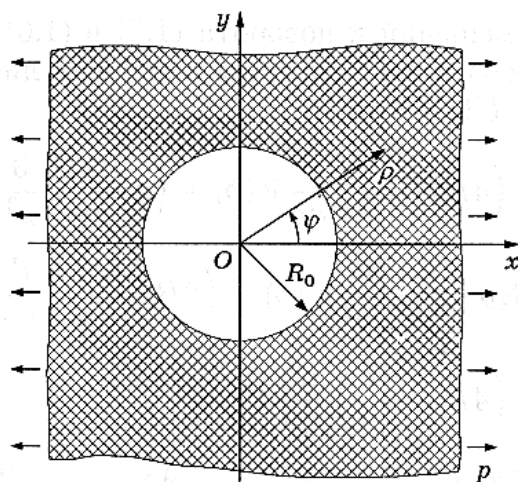


Рис. 1

где $\mathbf{n}_1 = \{-1, 0\}$ — вектор внешней нормали к окружности радиуса R_0 ; $\mathbf{n}_2 = \{1, 0\}$ — вектор внешней нормали к окружности радиуса $R_1 \rightarrow \infty$.

Для данной задачи в цилиндрической системе координат компоненты p_ρ и p_φ вектора \mathbf{p} записываются в виде $p_\rho = p(1 + \cos 2\varphi)/2$, $p_\varphi = -(p \sin 2\varphi)/2$. Переходя к компонентам тензоров напряжения и момента, граничные условия можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}|_{\rho=R_0} &= 0, & \sigma_{\rho\varphi}|_{\rho=R_0} &= 0, & \mu_{\rho z}|_{\rho=R_0} &= 0, \\ \sigma_{\rho\rho}|_{\rho \rightarrow \infty} &= p_\rho, & \sigma_{\rho\varphi}|_{\rho \rightarrow \infty} &= p_\varphi, & \mu_{\rho z}|_{\rho \rightarrow \infty} &= 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению четырех функций $F(\rho)$, $U(\rho)$, $V(\rho)$, $\omega(\rho)$ для среды Коссера и трех функций $F(\rho)$, $U(\rho)$, $V(\rho)$ для псевдосреды Коссера.

2. Построение аналитического решения уравнения равновесия. Подставляя вектор перемещений и поворота (1.7) в (1.4), получим уравнения равновесия в виде системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $F(\rho)$, $U(\rho)$, $V(\rho)$, $\omega(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} U(\rho) &= -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} U(\rho) - \frac{A_{11}}{\rho^2} U(\rho) - \frac{A_{12}}{\rho} \frac{d}{d\rho} V(\rho) - \frac{A_{13}}{\rho^2} V(\rho) + \frac{A_{14}}{\rho} \omega(\rho), \\ \frac{d^2}{d\rho^2} V(\rho) &= -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} V(\rho) - \frac{A_{21}}{\rho^2} V(\rho) - \frac{A_{22}}{\rho} \frac{d}{d\rho} U(\rho) - \frac{A_{23}}{\rho^2} U(\rho) - A_{24} \frac{d}{d\rho} \omega(\rho), \\ \frac{d^2}{d\rho^2} \omega(\rho) &= -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \omega(\rho) + 4A_{31} \omega(\rho) + \frac{4}{\rho^2} \omega(\rho) - 2A_{31} \frac{d}{d\rho} V(\rho) - \frac{2A_{31}}{\rho} V(\rho) - \frac{4A_{31}}{\rho} U(\rho), \\ \frac{d^2}{d\rho^2} F(\rho) &= -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} F(\rho) + \frac{1}{\rho^2} F(\rho), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\frac{\lambda + 6\mu + 4\alpha}{\lambda + 2\mu}, & A_{12} &= -2 \frac{\alpha - \lambda - \mu}{\lambda + 2\mu}, & A_{13} &= -2 \frac{\lambda + 3\mu + \alpha}{\lambda + 2\mu}, \\ A_{14} &= -\frac{4\alpha}{\lambda + 2\mu}, & A_{21} &= -\frac{4\lambda + 9\mu + \alpha}{\alpha + \mu}, & A_{22} &= 2 \frac{\alpha - \lambda - \mu}{\alpha + \mu}, \\ A_{23} &= -2 \frac{\lambda + 3\mu + \alpha}{\alpha + \mu}, & A_{24} &= -\frac{2\alpha}{\alpha + \mu}, & A_{31} &= \frac{\alpha}{\gamma + \varepsilon}. \end{aligned}$$

Подставляя вектор перемещений и поворота (1.7) в (1.6), получим уравнения равновесия для псевдосреды Коссера в виде системы линейных дифференциальных уравнений относительно функций $F(\rho)$, $U(\rho)$, $V(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{d\rho^3} V(\rho) &= -\frac{2}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} V(\rho) - \left(4B_1 - \frac{5}{\rho^2}\right) \frac{d}{d\rho} V(\rho) + \left(4\frac{B_3}{\rho} + \frac{3}{\rho^3}\right) V(\rho) - \\ &\quad - \left(2B_2\rho + \frac{2}{\rho}\right) \frac{d^2}{d\rho^2} U(\rho) - \left(2B_2 - \frac{2}{\rho^2}\right) \frac{d}{d\rho} U(\rho) + \left(2\frac{B_4}{\rho} + \frac{6}{\rho^3}\right) U(\rho), \\ \frac{d^4}{d\rho^4} V(\rho) &= -\frac{2}{\rho} \frac{d^3}{d\rho^3} V(\rho) + \left(4B_5 + \frac{7}{\rho^2}\right) \frac{d^2}{d\rho^2} V(\rho) + \\ &\quad + \left(4\frac{B_5}{\rho} - \frac{7}{\rho^3}\right) \frac{d}{d\rho} V(\rho) - \left(4\frac{B_6}{\rho^2} + \frac{9}{\rho^4}\right) V(\rho) - \frac{2}{\rho} \frac{d^3}{d\rho^3} U(\rho) + \\ &\quad + \frac{4}{\rho^2} \frac{d^2}{d\rho^2} U(\rho) - \left(8\frac{B_1}{\rho} - \frac{2}{\rho^3}\right) \frac{d}{d\rho} U(\rho) - \left(8\frac{B_3}{\rho^2} + \frac{18}{\rho^4}\right) U(\rho), \\ \frac{d^2}{d\rho^2} F(\rho) &= -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} F(\rho) + \frac{1}{\rho^2} F(\rho), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$B_1 = \frac{\lambda + \mu}{\gamma + \varepsilon}, \quad B_2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\gamma + \varepsilon}, \quad B_3 = \frac{\lambda + 3\mu}{\gamma + \varepsilon}, \quad B_4 = \frac{\lambda + 6\mu}{\gamma + \varepsilon}, \quad B_5 = \frac{\mu}{\gamma + \varepsilon}, \quad B_6 = \frac{4\lambda + 9\mu}{\gamma + \varepsilon}.$$

Общее решение системы уравнений (2.1) имеет вид

$$F(\rho) = C_1\rho + C_2\frac{1}{\rho}, \quad U(\rho) = \sum_{i=3}^8 C_i U_i(\rho), \quad V(\rho) = \sum_{i=3}^8 C_i V_i(\rho), \quad \omega(\rho) = \sum_{i=3}^8 C_i \omega_i(\rho),$$

где $U_i(\rho)$, $V_i(\rho)$, $\omega_i(\rho)$ ($i = 3, \dots, 8$) — частные решения системы (2.1); C_i — произвольные постоянные, определяемые из краевых условий (1.8).

В качестве $U_3(x)$, $V_3(x)$, $U_4(x)$, $V_4(x)$, $U_5(x)$, $V_5(x)$, $U_6(x)$, $V_6(x)$ использованы частные решения, соответствующие классической теории упругости, $\omega_3(x)$, $\omega_4(x)$, $\omega_5(x)$, $\omega_6(x)$ получены на основе соотношения (1). Правомерность такого представления доказана в [1]. Остальные частные решения, которые будем называть моментными, получены путем непосредственного решения системы (2.1).

Для удобства анализа получаемого решения все величины приведем к безразмерному виду. В этом случае безразмерные величины ρ , u_ρ , u_φ , ω_z , γ_{ij} , χ_{ij} , σ_{ij} , μ_{ij} , p будут связаны с размерными $\hat{\rho}$, \hat{u}_ρ , \hat{u}_φ , $\hat{\omega}_z$, $\hat{\gamma}_{ij}$, $\hat{\chi}_{ij}$, $\hat{\sigma}_{ij}$, $\hat{\mu}_{ij}$, \hat{p} соотношениями

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= R_0\rho, & \hat{u}_i &= R_0 u_i, & \hat{\sigma}_{ij} &= \mu\sigma_{ij}, & \hat{p} &= \mu p, \\ \hat{\mu}_{ij} &= R_0\mu\mu_{ij}, & \hat{\gamma}_{ij} &= \gamma_{ij}, & \hat{\chi}_{ij} &= \chi_{ij}/R_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Кроме того, введем три безразмерных величины, одна из которых зависит от характерного размера R_0 :

$$A = R_0 \sqrt{\frac{\mu}{B(\gamma + \varepsilon)}}, \quad B = \frac{\alpha + \mu}{\alpha}, \quad C = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}. \quad (2.4)$$

Используя (2.3), (2.4), получим общее решение относительно компонент векторов перемещения, вращения, тензоров напряжения и моментного напряжения в безразмерном виде

$$\begin{aligned}
 u_\rho(\rho, \varphi) &= C_1\rho + \frac{C_2}{\rho} + \left(\frac{C_3}{\rho^3} + \frac{C_4}{\rho} + C_5\rho + C_6\rho^3 + C_7U_7(\rho) + C_8U_8(\rho) \right) \cos 2\varphi, \\
 u_\varphi(\rho, \varphi) &= \left(\frac{C_3}{\rho^3} - C_4 \frac{\varkappa - 1}{(\varkappa + 1)\rho} - C_5\rho - C_6 \frac{\varkappa + 3}{\varkappa - 3} \rho^3 + C_7V_7(\rho) + C_8V_8(\rho) \right) \sin 2\varphi, \\
 \omega_z(\rho, \varphi) &= \left(\frac{C_4}{\rho^2} - C_6 \frac{3(\varkappa + 1)}{3 - \varkappa} \rho^2 + C_7\omega_7(\rho) + C_8\omega_8(\rho) \right) \sin 2\varphi, \\
 \sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi) &= C_1 \frac{4}{\varkappa - 1} - \frac{2C_2}{\rho^2} + \left(-C_3 \frac{6}{\rho^4} - C_4 \frac{8}{(\varkappa + 1)\rho^2} + 2C_5 + C_7S_{\rho\rho}^{(7)}(\rho) + C_8S_{\rho\rho}^{(8)}(\rho) \right) \cos 2\varphi, \\
 \sigma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) &= \left(-C_3 \frac{6}{\rho^4} - C_4 \frac{4}{(\varkappa + 1)\rho^2} - 2C_5 - C_6 \frac{12}{3 - \varkappa} \rho^2 + C_7S_{\rho\varphi}^{(7)}(\rho) + C_8S_{\rho\varphi}^{(8)}(\rho) \right) \sin 2\varphi, \\
 \sigma_{\varphi\rho}(\rho, \varphi) &= \left(-C_3 \frac{6}{\rho^4} - C_4 \frac{4}{(\varkappa + 1)\rho^2} - 2C_5 - C_6 \frac{12}{3 - \varkappa} \rho^2 + C_7S_{\varphi\rho}^{(7)}(\rho) + C_8S_{\varphi\rho}^{(8)}(\rho) \right) \sin 2\varphi, \\
 \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) &= C_1 \frac{4}{\varkappa - 1} + \frac{2C_2}{\rho^2} + \left(C_3 \frac{6}{\rho^4} - 2C_5 - C_6 \frac{24}{3 - \varkappa} \rho^2 + C_7S_{\varphi\varphi}^{(7)}(\rho) + C_8S_{\varphi\varphi}^{(8)}(\rho) \right) \cos 2\varphi, \\
 \mu_{\rho z}(\rho, \varphi) &= \left(-C_4 \frac{2}{A^2B\rho^3} - C_6 \frac{6(\varkappa + 1)}{(3 - \varkappa)A^2B} \rho + C_7M_{\rho z}^{(7)}(\rho) + C_8M_{\rho z}^{(8)}(\rho) \right) \sin 2\varphi, \\
 \mu_{\varphi z}(\rho, \varphi) &= \left(C_4 \frac{2}{A^2B\rho^3} - C_6 \frac{6(\varkappa + 1)}{(3 - \varkappa)A^2B} \rho + C_7M_{\varphi z}^{(7)}(\rho) + C_8M_{\varphi z}^{(8)}(\rho) \right) \cos 2\varphi, \\
 \mu_{z\rho}(\rho, \varphi) &= C\mu_{\rho z}(\rho, \varphi), \quad \mu_{z\varphi}(\rho, \varphi) = C\mu_{\varphi z}(\rho, \varphi), \quad D = |u_\rho(R_0, 0)/u_\rho(R_0, \pi/2)|.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $\varkappa = (3\mu + \lambda)/(\mu + \lambda)$; D — макровеличина, характеризующая степень искажения контура кругового отверстия при действии одноосной нагрузки (эта величина может быть экспериментально измерена).

Функции ρ при константах C_7 и C_8 в выражении (2.5) определяются соответствующими моментными частными решениями и имеют вид

$$\begin{aligned}
 U_7(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho} I_0(2A\rho) - \frac{1}{A^3\rho^2} I_1(2A\rho), & U_8(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho} K_0(2A\rho) + \frac{1}{A^3\rho^2} K_1(2A\rho), \\
 V_7(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho} I_0(2A\rho) - \frac{1 + A^2\rho^2}{A^3\rho^2} I_1(2A\rho), & V_8(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho} K_0(2A\rho) + \frac{1 + A^2\rho^2}{A^3\rho^2} K_1(2A\rho), \\
 \omega_7(\rho) &= -BI_0(2A\rho) + \frac{B}{A\rho} I_1(2A\rho), & \omega_8(\rho) &= -BK_0(2A\rho) - \frac{B}{A\rho} K_1(2A\rho), \\
 S_{\rho\rho}^{(7)}(\rho) &= -\frac{6}{A^2\rho^2} I_0(2A\rho) + \frac{6 + 4A^2\rho^2}{A^3\rho^3} I_1(2A\rho), \\
 S_{\rho\rho}^{(8)}(\rho) &= -\frac{6}{A^2\rho^2} K_0(2A\rho) - \frac{6 + 4A^2\rho^2}{A^3\rho^3} K_1(2A\rho), \\
 S_{\rho\varphi}^{(7)}(\rho) &= -\frac{6}{A^2\rho^2} I_0(2A\rho) + \frac{6 + 2A^2\rho^2}{A^3\rho^3} I_1(2A\rho), \\
 S_{\rho\varphi}^{(8)}(\rho) &= -\frac{6}{A^2\rho^2} K_0(2A\rho) - \frac{6 + 2A^2\rho^2}{A^3\rho^3} K_1(2A\rho),
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$S_{\varphi\rho}^{(7)}(\rho) = -\frac{6 + 4A^2\rho^2}{A^2\rho^2} I_0(2A\rho) + \frac{6 + 6A^2\rho^2}{A^3\rho^3} I_1(2A\rho),$$

$$S_{\varphi\rho}^{(8)}(\rho) = -\frac{6 + 4A^2\rho^2}{A^2\rho^2} K_0(2A\rho) - \frac{6 + 6A^2\rho^2}{A^3\rho^3} K_1(2A\rho),$$

$$S_{\varphi\varphi}^{(7)}(\rho) = \frac{6}{A^2\rho^2} I_0(2A\rho) - \frac{6 + 4A^2\rho^2}{A^3\rho^3} I_1(2A\rho), \quad S_{\varphi\varphi}^{(8)}(\rho) = \frac{6}{A^2\rho^2} K_0(2A\rho) + \frac{6 + 4A^2\rho^2}{A^3\rho^3} K_1(2A\rho),$$

$$M_{\rho z}^{(7)}(\rho) = \frac{2}{A^2\rho} I_0(2A\rho) - \frac{2 + 2A^2\rho^2}{A^3\rho^2} I_1(2A\rho), \quad M_{\rho z}^{(8)}(\rho) = \frac{2}{A^2\rho} K_0(2A\rho) + \frac{2 + 2A^2\rho^2}{A^3\rho^2} K_1(2A\rho),$$

$$M_{\varphi z}^{(7)}(\rho) = -\frac{2}{A^2\rho} I_0(2A\rho) + \frac{2}{A^3\rho^2} I_1(2A\rho), \quad M_{\varphi z}^{(8)}(\rho) = -\frac{2}{A^2\rho} K_0(2A\rho) - \frac{2}{A^3\rho^2} K_1(2A\rho).$$

Здесь $I_0(\rho), I_1(\rho)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода [11, 12], в пределе при $\rho \rightarrow \infty$ стремящиеся к бесконечности:

$$I_m(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho/2)^{2k+m}}{\Gamma(k+1)\Gamma(m+k+1)},$$

$K_0(\rho), K_1(\rho)$ — модифицированные функции Бесселя второго рода, или функции Макдональда, в пределе при $\rho \rightarrow \infty$ стремящиеся к нулю:

$$K_m(\rho) = (-1)^{m+1} I_m(\rho) \left(\ln \frac{\rho}{2} + C \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{2k-m} +$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho/2)^{2k+m}}{k!(m+k)!} \left(\sum_{s=1}^k \frac{1}{s} + \sum_{s=1}^{k+m} \frac{1}{s} \right),$$

где m — целое число; $C = 0,5772 \dots$ — константа Эйлера.

Используя граничные условия (1.8), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно констант C_1, \dots, C_8 ($R_1 \rightarrow \infty$) $A\{C_1, \dots, C_8\}^T = \{0, 0, 0, 0, p/2, p/2, -p/2, 0\}^T$, где

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{\varkappa-1} & -\frac{2}{R_0^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{R_0^4} & -\frac{8}{(\varkappa+1)R_0^2} & 2 & 0 & S_{\rho\rho}^{(7)}(L) & S_{\rho\rho}^{(8)}(L) \\ 0 & 0 & -\frac{6}{R_0^4} & -\frac{4}{(\varkappa+1)R_0^2} & -2 & -\frac{12R_0^2}{3-\varkappa} & S_{\rho\varphi}^{(7)}(L) & S_{\rho\varphi}^{(8)}(L) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{A^2BR_0^3} & 0 & -\frac{6(\varkappa+1)R_0^2}{(3-\varkappa)A^2B} & M_{\rho z}^{(7)}(L) & M_{\rho z}^{(8)}(L) \\ \frac{4}{\varkappa-1} & -\frac{2}{R_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{R_1^4} & -\frac{8}{(\varkappa+1)R_1^2} & 2 & 0 & S_{\rho\rho}^{(7)}(2AR_1) & S_{\rho\rho}^{(8)}(2AR_1) \\ 0 & 0 & -\frac{6}{R_1^4} & -\frac{4}{(\varkappa+1)R_1^2} & -2 & -\frac{12R_1^2}{3-\varkappa} & S_{\rho\varphi}^{(7)}(2AR_1) & S_{\rho\varphi}^{(8)}(2AR_1) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{A^2BR_1^3} & 0 & -\frac{6(\varkappa+1)R_1^2}{(3-\varkappa)A^2B} & M_{\rho z}^{(7)}(2AR_1) & M_{\rho z}^{(8)}(2AR_1) \end{bmatrix}$$

Решение данной системы можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{p(\varkappa - 1)}{8}, & C_2 &= \frac{pR_0^2}{4}, \\
 C_3 &= -\frac{pR_0^4}{4} \left(\frac{2L(BL^2 + 4\varkappa + 4)K_0(L)}{L^2(2BLK_0(L) + (BL^2 + 4B + 2\varkappa + 2)K_1(L))} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(BL^4 + 4BL^2 + 2L^2 + 2L^2\varkappa + 16\varkappa + 16)K_1(L)}{L^2(2BLK_0(L) + (BL^2 + 4B + 2\varkappa + 2)K_1(L))} \right), \quad (2.7) \\
 C_4 &= \frac{pR_0^2(\varkappa + 1)}{4} \frac{B(2LK_0(L) + (4 + L^2)K_1(L))}{2BLK_0(L) + (BL^2 + 4B + 2\varkappa + 2)K_1(L)}, & C_5 &= \frac{p}{4}, \\
 C_6 &= 0, & C_7 &= 0, & C_8 &= \frac{p(\varkappa + 1)L}{2(2BLK_0(L) + (BL^2 + 4B + 2\varkappa + 2)K_1(L))}.
 \end{aligned}$$

Здесь для сокращения записи введена безразмерная величина $L = 2AR_0$.

Решение системы уравнений (2.2), соответствующее псевдосреде Коссера, дается также соотношениями (2.5)–(2.7), однако в данном случае $B = 1$ (2.4), что соответствует предельному случаю при $\alpha \rightarrow \infty$.

Вектор перемещения и компоненты тензора напряжений, соответствующие решению данной задачи в рамках симметричной теории упругости, а также вектор вращения, найденный по соотношению (1), имеют вид

$$\begin{aligned}
 u_\rho^*(\rho, \varphi) &= C_1^* \rho + \frac{C_2^*}{\rho} + \left(\frac{C_3^*}{\rho^3} + \frac{C_4^*}{\rho} + C_5^* \rho \right) \cos 2\varphi, \\
 u_\varphi^*(\rho, \varphi) &= \left(\frac{C_3^*}{\rho^3} - C_4^* \frac{\varkappa - 1}{(\varkappa + 1)\rho} - C_5^* \rho \right) \sin 2\varphi, & \omega_z^*(\rho, \varphi) &= \frac{C_4^*}{\rho^2} \sin 2\varphi, \\
 \sigma_{\rho\rho}^*(\rho, \varphi) &= \frac{4C_1^*}{\varkappa - 1} - \frac{2C_2^*}{\rho^2} + \left(-C_3^* \frac{6}{\rho^4} - \frac{8C_4^*}{(\varkappa + 1)\rho^2} + 2C_5^* \right) \cos 2\varphi, \quad (2.8) \\
 \sigma_{\rho\varphi}^*(\rho, \varphi) &= \left(-C_3^* \frac{6}{\rho^4} - C_4^* \frac{4}{(\varkappa + 1)\rho^2} - 2C_5^* \right) \sin 2\varphi, & \sigma_{\varphi\rho}^*(\rho, \varphi) &= \sigma_{\rho\varphi}^*(\rho, \varphi), \\
 \sigma_{\varphi\varphi}^*(\rho, \varphi) &= C_1^* \frac{4}{\varkappa - 1} + \frac{2C_2^*}{\rho^2} + \left(C_3^* \frac{6}{\rho^4} - 2C_5^* \right) \cos 2\varphi, & D^* &= \left| \frac{u_\rho^*(R_0, 0)}{u_\rho^*(R_0, \pi/2)} \right|,
 \end{aligned}$$

где $C_1^* = p(\varkappa - 1)/8$; $C_2^* = pR_0^2/4$; $C_3^* = -pR_0^4/4$; $C_4^* = pR_0^2(\varkappa + 1)/4$; $C_5^* = p/4$; $C_6^* = 0$ [7].

3. Параметрический анализ решения. Полученные решения позволяют провести сравнение напряженно-деформированных состояний в окрестности кругового отверстия, полученных в рамках среды Коссера, псевдосреды Коссера и симметричной среды.

На рис. 2 представлены зависимости компоненты ω_z вектора поворота от координаты ρ при $\varphi = \pi/4$ (рис. 2,а), компоненты $\sigma_{\rho\rho}$ тензора напряжений от координаты ρ при $\varphi = 0$ (рис. 2,б), компоненты $\sigma_{\rho\varphi}$ тензора напряжений от координаты ρ при $\varphi = \pi/4$ (рис. 2,в), компоненты $\sigma_{\varphi\rho}$ тензора напряжений от координаты ρ при $\varphi = \pi/4$ (рис. 2,г). Сплошные линии соответствуют зависимостям для несимметричной среды, штриховые — для симметричной, пунктирные — для псевдосреды Коссера. Представленные зависимости получены для физических констант $\alpha = 0,5$, $\gamma = \varepsilon = 1$, $\varkappa = 1,8$, радиуса внутренней окружности $R_0 = 0,1$.

На рис. 3,а–г соответственно представлены зависимости радиальной компоненты u_ρ вектора перемещения, азимутальной компоненты u_φ вектора перемещения, компоненты ω_z

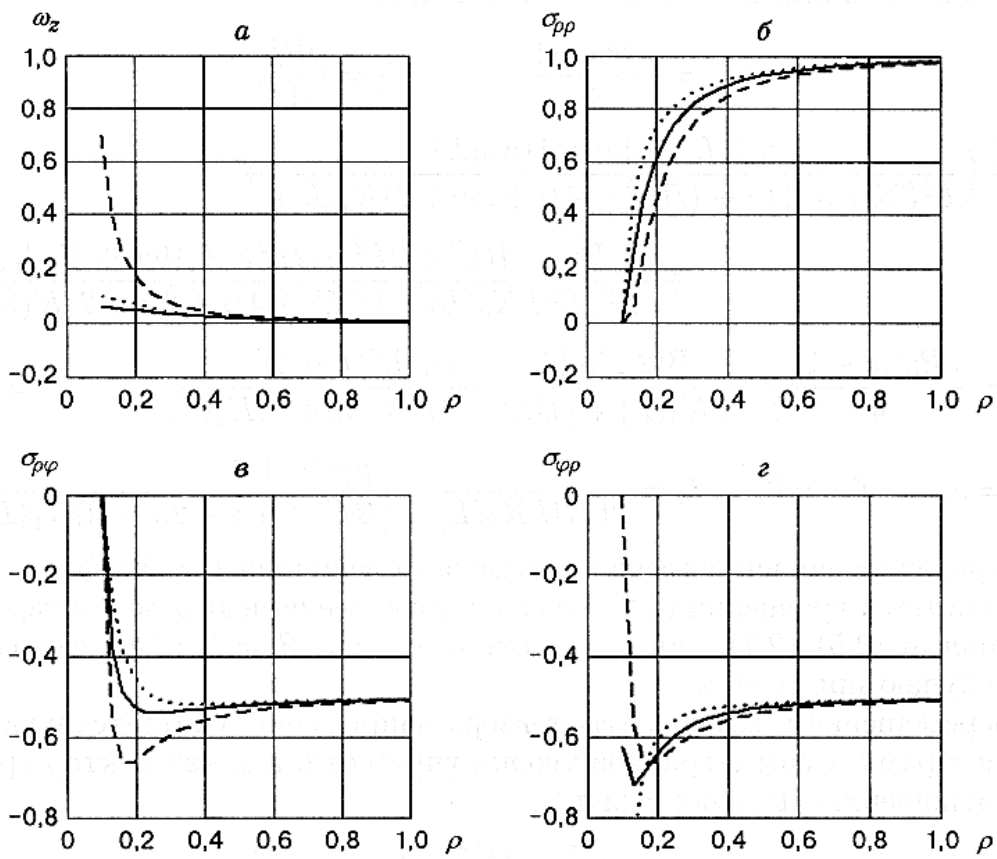


Рис. 2

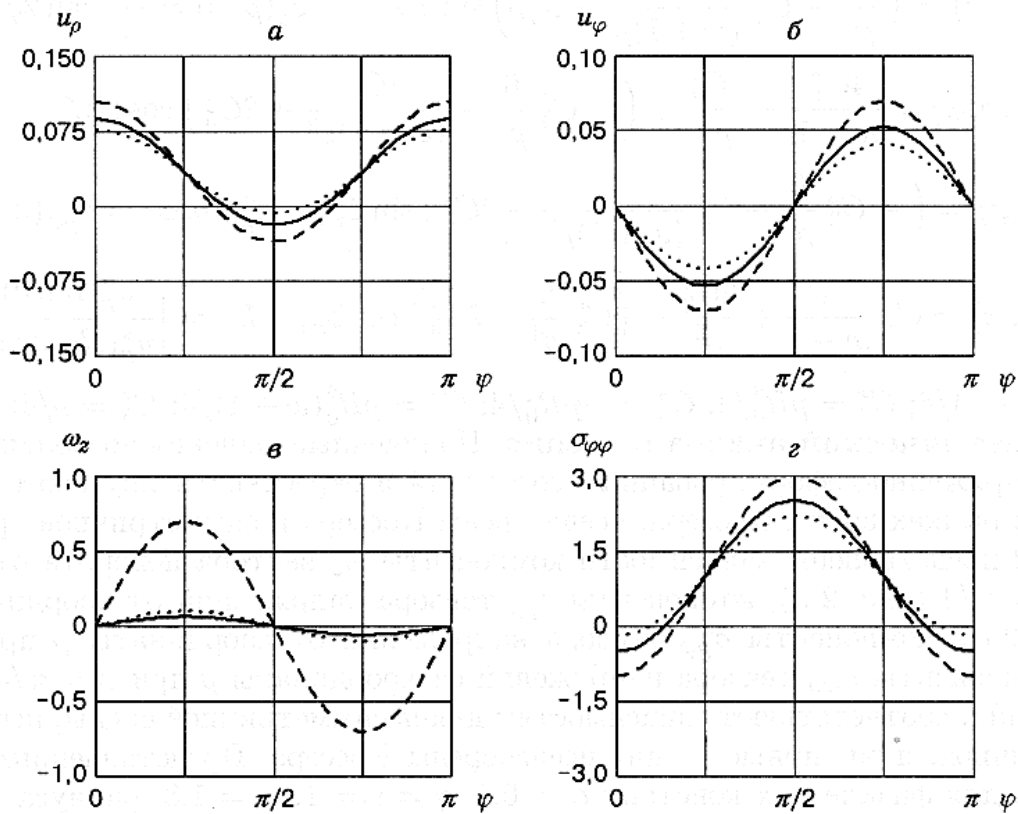


Рис. 3

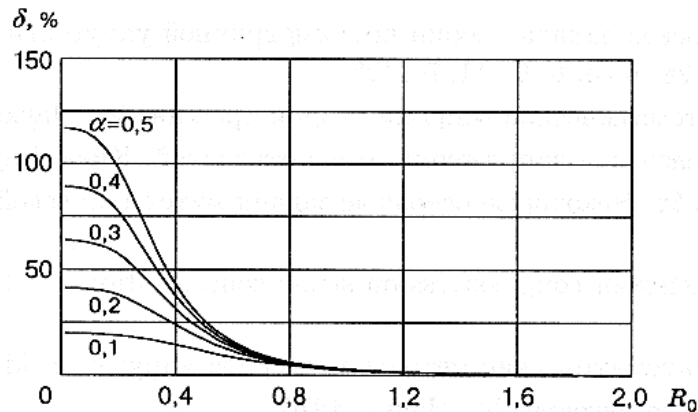


Рис. 4

вектора поворота, компоненты $\sigma_{\varphi\varphi}$ тензора напряжений от координаты φ при $\rho = R_0$ (обозначения те же, что на рис. 2).

Зависимости, приведенные на рис. 3, а, позволяют сделать вывод о том, что в качестве экспериментально измеряемой макровеличины можно выбрать параметр D , характеризующий степень искажения контура кругового отверстия.

Близость решения (2.5), полученного в рамках несимметричной теории, и классического решения (2.8) будем оценивать величиной $\delta = |(D - D^*)/D^*| \cdot 100\%$. Зависимость δ от размера отверстия R_0 при различных значениях α приведена на рис. 4. Из анализа кривых следует, что влияние моментного описания поведения материала на величину δ значительно усиливается по мере уменьшения характерного размера (радиуса кругового отверстия). Это объясняется тем, что безразмерное моментное решение зависит от характерного размера, а классическое не зависит.

Заключение. Качественный и численный анализ аналитических решений, полученных в работе, а также зависимостей, представленных на рис. 2–4, позволяет сделать следующие выводы.

Запись полученных аналитических решений в безразмерном виде позволила установить, что безразмерное моментное решение зависит от характерного размера, а классическое не зависит.

По мере уменьшения размера кругового отверстия увеличивается различие безразмерных макровеличин, полученных в рамках несимметричной теории, по сравнению с классическими теориями (рис. 4).

В качестве экспериментально измеряемой величины можно использовать параметр D , характеризующий искажение кругового отверстия.

Различия между классическим и несимметричным решениями, а также решением для псевдосреды Коссера зависят от материальных констант. Классическое решение является предельным случаем несимметричного решения при $\alpha \rightarrow 0$, решение для псевдосреды Коссера — при $\alpha \rightarrow \infty$. Различие классического решения и решения для псевдосреды Коссера определяется величиной $\gamma + \varepsilon$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Континуальная теория асимметричной упругости. Равновесие изотропного тела // Физика твердого тела. 1964. Т. 6, вып. 9. С. 2689–2699.
3. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 3. С. 401–408.

4. Пальмов В. А. Плоская задача теории несимметричной упругости // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 6. С. 1117–1120.
5. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
6. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968.
7. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
8. Mindlin R. D. Influence of couple-stress on stress concentrations // Experiment. Mech. 1963. V. 3, N 1. P. 1–7.
9. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973.
10. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.
11. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974.
12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 26/XII 2000 г.