

УДК 534.22.094.1

О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ КОССЕРА

© 2005 г. М. А. Кулеш, академик В. П. Матвеев, И. Н. Шардаков

Поступило 23.03.2005 г.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается задача о распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера (случай полупространства). Деформированное состояние характеризуется независимыми векторами перемещения и поворота, тензоры напряжений и моментных напряжений несимметричны [1, 2]. В отличие от известных работ [3–6] решения уравнений движения находим в виде волновых пакетов, задаваемых спектром Фурье произвольной формы. Полученное решение состоит из двух независимых частей, одна из которых описывает волну Рэлея, а другая соответствует поперечной волне, затухающей с глубиной. Для обоих типов волн выписаны аналитические решения в перемещениях. Особо необходимо отметить, что в отличие от волны Рэлея полученное решение для поперечной поверхностной волны не имеет аналогов в классической теории упругости. В качестве численных иллюстраций приведено сравнение решения для поперечной волны с решением для волны Рэлея.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим полупространство, поверхность которого свободна от нагрузок в случае отсутствия массовых сил и моментов. Для описания упругой среды Коссера будем использовать следующие соотношения [1]:

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda)\text{grad div } \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\text{rot rot } \mathbf{u} + \\ + 2\alpha\text{rot } \boldsymbol{\omega} = \varepsilon \ddot{\mathbf{u}}, \\ (2\gamma + \beta)\text{grad div } \boldsymbol{\omega} - (\gamma + \varepsilon)\text{rot rot } \boldsymbol{\omega} + \\ + 2\alpha\text{rot } \mathbf{u} - 4\alpha\boldsymbol{\omega} = j \ddot{\boldsymbol{\omega}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{u} – вектор перемещения, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор вращения, λ, μ – постоянные Ламе, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – физические постоянные материала в рамках моментной теории упругости, ρ – плотность, j – параметр, отвечающий за меру инерции среды при вращении. Оси декартовых координат x и y направим по по-

верхности, а оси z – в глубину полупространства. Граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \mu_{zx} = 0, \\ \mu_{zy} = 0, \quad \mu_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Пусть волна распространяется в направлении оси x . Общее решение системы (1) представим в виде фурье-интегралов, что соответствует представлению решения как ограниченного во временном и фурье-пространствах волнового пакета произвольной формы (физический смысл имеют здесь только вещественные части соответствующих компонент):

$$\begin{aligned} u_n(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_n(z) e^{i(kx + ft)} \hat{S}_0(f) df, \\ \omega_n(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} W_n(z) e^{i(kx + ft)} \hat{S}_0(f) df, \end{aligned} \quad (3)$$

где $n = \{x, y, z\}$ – координатный индекс, i – мнимая единица, k – волновое число, f – круговая частота, t – время, $U_n(z)$ и $W_n(z)$ – амплитудные функции, зависящие от глубины, а $\hat{S}_0(f)$ – комплексный фурье-спектр сигнала-источника, определяющий форму волнового пакета.

Выполним непрерывное фурье-преобразование соотношений (1)–(3). Подставим фурье-образ решения в спектральную систему и получим две развязанные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее обезразмерим полученные системы с использованием параметров

$$\begin{aligned} A = X_0 \sqrt{\frac{\mu}{B(\gamma + \varepsilon)}}, \quad B = \frac{\alpha + \mu}{\alpha}, \quad C = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \\ C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_2^2 = \frac{\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_3^2 = \frac{BC_2^2}{B - 1}, \\ C_4^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{j X_0^2 f_0^2}, \quad C_5^2 = \frac{\gamma + 2\beta}{j X_0^2 f_0^2}, \end{aligned}$$

где X_0 – некоторый характерный размер, а f_0 – характерная частота.

Решением получившихся систем будут являться выражения для амплитудных функций, подставляя которые в (3), окончательно получим:

$$u_x(x, z, t) = F_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -ke^{-v_0 z} - \frac{F_1}{k} e^{-v_1 z} + \frac{F_2}{k} e^{-v_2 z} \right\} \times e^{i(kx + ft - \pi/2)} \hat{S}_0(f) df,$$

$$u_y(x, z, t) = \frac{G_0(B-1)}{2A^2 B} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{G_1}{k\xi_1} \left(a_1 - \frac{f^2}{C_4^2} + \frac{4A^2 B}{B-1} \right) e^{-\xi_1 z} + \frac{G_2}{k\xi_2} \left(a_2 - \frac{f^2}{C_4^2} + \frac{4A^2 B}{B-1} \right) e^{-\xi_2 z} \right\} e^{i(kx + ft - \pi/2)} \hat{S}_0(f) df,$$

$$u_z(x, z, t) = F_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -v_0 e^{-v_0 z} - \frac{F_1}{v_1} e^{-v_1 z} + \frac{F_2}{v_1} e^{-v_2 z} \right\} \times e^{i(kx + ft)} \hat{S}_0(f) df,$$

$$\omega_x(x, z, t) = G_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -ke^{-\xi_0 z} - \frac{G_1}{k} e^{-\xi_1 z} + \frac{G_2}{k} e^{-\xi_2 z} \right\} \times e^{i(kx + ft - \pi/2)} \hat{S}_0(f) df,$$

$$\omega_y(x, z, t) = \frac{F_0 B}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{F_1}{kv_1} \left(a_1 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{-v_1 z} + \frac{F_2}{kv_2} \left(a_2 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{-v_2 z} \right\} e^{i(kx + ft - \pi/2)} \hat{S}_0(f) df,$$

$$\omega_z(x, z, t) = G_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\xi_0 e^{-\xi_0 z} - \frac{G_1}{\xi_1} e^{-\xi_1 z} + \frac{G_2}{\xi_2} e^{-\xi_2 z} \right\} e^{i(kx + ft)} \hat{S}_0(f) df.$$

Экспоненциальные показатели амплитудных функций определяются здесь выражениями

$$v_0 = \sqrt{k^2 - \frac{f^2}{C_1^2}}, \quad \xi_0 = \sqrt{k^2 - \frac{f^2}{C_5^2} + \frac{2A^2 BC_4^2}{(B-1)C_5^2}},$$

$$v_{1,2} = \xi_{1,2} = \sqrt{k^2 - a_{1,2}},$$

$$a_{1,2} = \frac{C_3^2 + C_4^2}{2C_3^2 C_4^2} f^2 - 2A^2 \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{(C_3^2 - C_4^2)^2}{4C_3^4 C_4^4} f^4 - \frac{2A^2(C_2^2 C_3^2 - 2C_3^2 C_4^2 + C_2^2 C_4^2)}{C_2^2 C_3^2 C_4^2} f^2 + 2A^4}.$$

Вещественные константы F_m и G_m определяются из обезразмеренных граничных условий (2):

$$F_m = (-1)^m ikv_m \frac{D_m}{F_0}, \quad G_m = (-1)^m ik\xi_m \frac{E_m}{G_0},$$

$$m = 1, 2,$$

где F_0 и G_0 – неопределенные константы, а комплексные величины D_m и E_m являются решением однородных систем

$$M_1 \cdot \{D_0, D_1, D_2\}^T = 0, \quad M_2 \cdot \{E_0, E_1, E_2\}^T = 0.$$

Из условия разрешимости этих систем получаем следующие волновые уравнения:

1) уравнение $\det M_1 = 0$ описывает волну Рэлея с компонентами u_x, u_z, ω_y , где

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2k^2 - \frac{f^2}{C_2^2} & -2ikv_1 & -2ikv_2 \\ 2ikv_0 & 2k^2 - \frac{f^2}{C_2^2} & 2k^2 - \frac{f^2}{C_2^2} \\ 0 & \left(a_1 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) v_1 & \left(a_2 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) v_2 \end{bmatrix};$$

2) уравнение $\det M_2 = 0$ описывает поперечную волну с компонентами u_y, ω_x, ω_z :

$$M_2 = \begin{bmatrix} \frac{2ik}{1-B} & \left(2 + \frac{a_1 C_4^2 - f^2}{2A^2 C_4^2} \right) \xi_1 & \left(2 + \frac{a_2 C_4^2 - f^2}{2A^2 C_4^2} \right) \xi_2 \\ ik(1+C)\xi_0 & k^2 C + \xi_1^2 & k^2 C + \xi_2^2 \\ \left(\frac{2C_5^2}{(1+C)C_4^2} - 1 \right) (k^2 - \xi_0^2) - 4\xi_0^2 & 4ik\xi_1 & 4ik\xi_2 \end{bmatrix}.$$

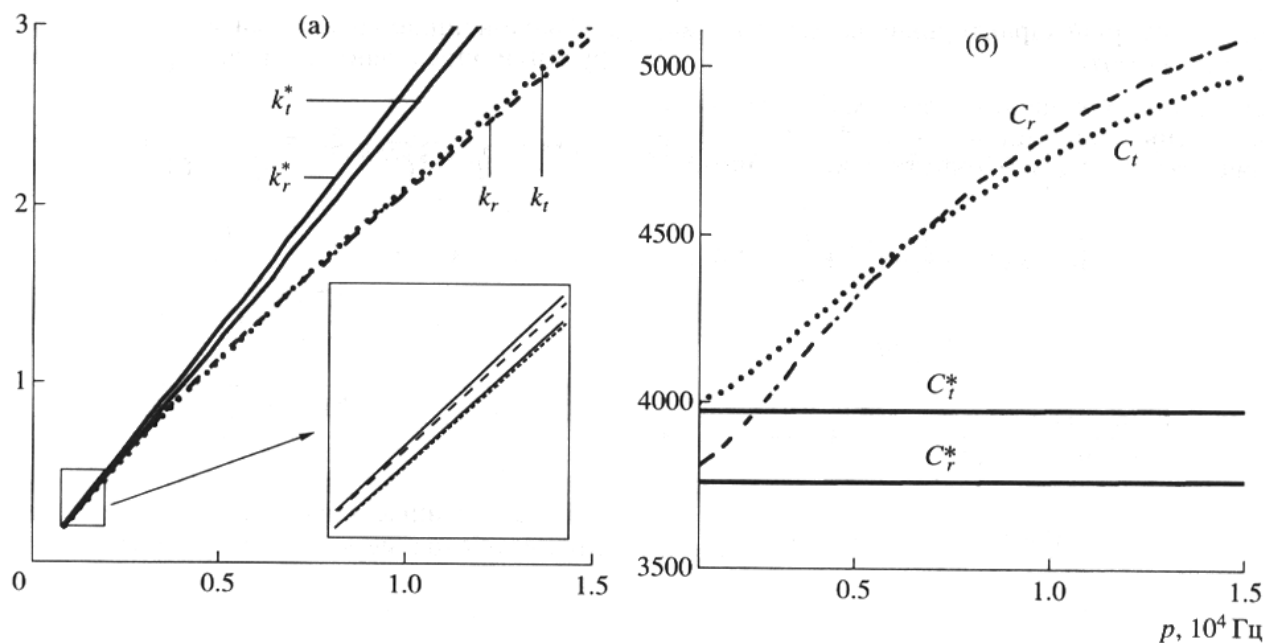


Рис. 1. Сравнение волновых чисел (а) и фазовых скоростей (б) для классической и несимметричной сред.

Зависимости волновых чисел и фазовых скоростей от физической частоты p , измеряемой в герцах, приведены на рис. 1, где k_r^* , C_r^* – решение для волны Рэлея в классическом случае; k_r^* , C_r^* – решение для объемной поперечной волны в классическом случае; k_r , C_r – решение для поверхностной поперечной волны в среде Коссера.

На рис. 2 приведены зависимости компонент перемещений полученного решения от глубины, отнесенной к длине волны. Данная зависимость иллюстрирует, что поперечная волна является типично поверхностной, причем толщина слоя локализации зависит от частоты.

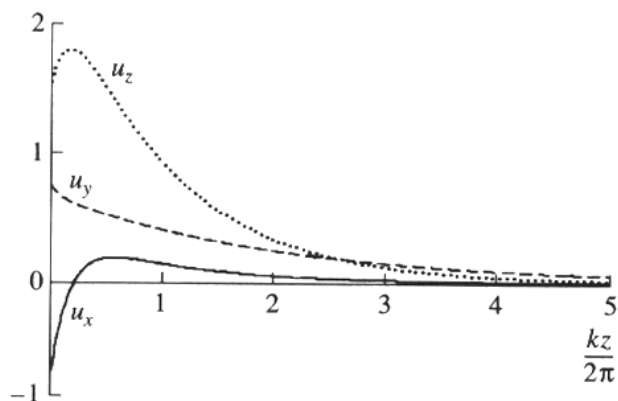


Рис. 2. Сравнение компонент перемещения в зависимости от глубины.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат, полученный в данной работе, состоит в следующем. В полупространстве, динамическое поведение которого описывается моделью среды Коссера, помимо поверхностной эллиптической волны Рэлея может существовать также поверхностная волна, имеющая одну поперечную компоненту перемещений. Геометрически эта волна подобна волне Лява, однако в классической теории упругости существование волны Лява как поверхностной волны определяется наличием слоя на полупространстве. При стремлении толщины слоя к нулю волна Лява переходит в объемную. Таким образом, в среде Коссера обнаруживается качественно новая волновая мода, аналогов которой в классической теории упругости нет.

В качестве второго результата можно выделить тот факт, что существует частота, зависящая только от материальных параметров, для которой скорости распространения в полупространстве волны Рэлея и поперечной поверхностной волны совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. Пальмов В.А. // ПММ. 1964. Т. 28. № 3. С. 401–408.
3. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1999.
4. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories. I. Foundation and Solids. N.Y.: Springer, 1999. С. 319.
5. Лялин А.Е., Пирожков В.А., Степанов Р.Д. // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 6. С. 838–840.
6. Nath S., Sengupta P.R., Debnath L. // Comput. Math. Appl. 1998. V. 35. № 3. P. 47–55.