

УДК 539.3

© 2007 г. **М.А. КУЛЕШ, В.П. МАТВЕЕНКО, И.Н. ШАРДАКОВ**

**ДИСПЕРСИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РЭЛЕЯ
ДЛЯ СРЕДЫ КОССЕРА**

В рамках несимметричной теории упругости (среда Коссера) рассмотрена задача о распространении поверхностной акустической волны Рэлея в полупространстве. Волна представляется в виде волнового пакета произвольной формы, ограниченного как во временном, так и в Фурье пространстве. Предполагается, что деформация материала описывается не только вектором перемещения, но и независимым вектором поворота. Получено общее аналитическое решение этой задачи в перемещениях. Приведен сравнительный анализ полученного решения с соответствующим решением для классической упругой среды. Введены и проанализированы макропараметры, характеризующие отличие напряженно-деформированного состояния от предсказываемого классической теорией упругости: коэффициент эллиптичности, волновое число, фазовая и групповая скорости. Необходимо отметить, что эти параметры экспериментально измеряемы.

1. Введение. Модель среды, деформация которой описывается не только вектором перемещения \mathbf{u} , но и кинематически независимым вектором поворота $\boldsymbol{\omega}$, являющимися функциями координат и времени, давно привлекает внимание исследователей. Эта теория получила название моментной или несимметричной теории упругости. Особенность деформационного поведения упругих тел в рамках этой теории заключается в том, что в упругом теле, начиная с некоторого характерного масштаба и (или) при высоких уровнях градиентов напряжений или деформаций, возможна реализация напряженно-деформированного состояния, которое будет в значительной степени отличаться от предсказываемого классической (симметричной) теорией упругости.

В теории среды Коссера [1, 2] вектор $\boldsymbol{\omega}$ характеризует малые повороты частиц, а тензоры напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}$ являются несимметричными. Динамическое поведение упругой изотропной среды без учета температурных эффектов характеризуется восемью константами: две постоянные Ламе, 4 упругие константы, характеризующие микроструктуру, а также плотность и параметр, отвечающий за меру инерции среды при вращении (плотность момента инерции).

В [3] формулируются также микрополярная теория упругости, где свойства среды в случае изотропного упругого тела также, как и для среды Коссера, описываются восемью константами. В принципе эта теория эквивалентна теории среды Коссера, однако отличается трактовкой кинематических величин и, как следствие, другой записью всех основных уравнений.

Во многих публикациях анализ моментного поведения материала рассматривается в рамках упрощенной модели, называемой средой со стесненным вращением или псевдосредой Коссера [4]. Упрощение достигается за счет использования зависимости $\boldsymbol{\omega} = \text{rot}\mathbf{u}/2$, которая, в частности, позволяет сократить число физических параметров с восьми до пяти. Но из-за недостатков, подробно рассмотренных в [1], модель псевдосреды Коссера далее в работе использоваться не будет.

В рамках несимметричной теории упругости (особенно в случае стесненного вращения) многими авторами получено большое количество точных аналитических решений. Во многих работах, как правило, эти решения анализируются и сопоставляются с соответствующими решениями классической теории упругости. При таком сопоставлении, как правило, новые физические константы, определяющие вклад моментных составляющих, задают из области их энергетически допустимых значений. Это обусловлено скудностью информации о материальных константах сред с микроструктурой, что является одним из основных факторов, сдерживающих развитие моделей несимметричных сред.

В литературе удалось найти работы, посвященные идентификации физических констант среды Коссера. Измерение констант упругости на основе статических экспериментов производилось в [5]. Динамические (в частности, ультразвуковые) эксперименты использовались в [6] для идентификации моделей Леру и псевдосреды Коссера и в [7, 8] для идентификации линейной среды Коссера.

Интересным экспериментальным фактом, для которого нет объяснения в рамках классической модели сплошной среды, является дисперсия упругих поверхностных волн Рэлея [6]. В рамках же среды Коссера этот факт имеет объяснение. Следует отметить, что дисперсия, эллиптичность и степень затухания амплитуды рэлеевской волны с глубиной зависят от физических параметров материала, в том числе и от параметров, описывающих моментные свойства. Это обстоятельство позволяет надеяться на эффективное применение этого типа волн в возможных экспериментальных исследованиях, направленных на обнаружение “моментного” поведения материала и далее на идентификацию материальных параметров.

Задача о распространении поверхностных волн в полупространстве для классической упругой среды рассматривалась, например, в [9, 10], для псевдосреды Коссера – в [11], а для микрополярированной среды – в [3]. В [12] получен аналог уравнения Рэлея для среды Коссера, однако следует отметить, что это решение не позволяет в полной мере проанализировать структуру и затухание рэлеевской волны. Во всех вышеперечисленных работах исследуются монохроматические волны, решения для которых задаются в виде единичной гармоники, и потому дисперсия вполне характеризуется только фазовой скоростью, групповая скорость в этом случае не является характерным параметром. Более того, для классического упругого полупространства эти скорости совпадают в силу бездисперсионности. Однако в ряде случаев измерению доступна только групповая скорость, поэтому актуальным является также рассмотрение таких задач, где этот параметр проявляет себя.

Для исследования групповой скорости больше подходят немонахроматические волны, решения для которых описываются интегралом Фурье [13–15]. В настоящее время это представление получило широкое распространение при анализе ~~нелинейных~~ волн, здесь оно используется для построения аналитического решения уравнений эластокинетики среды Коссера. Эти уравнения и интегральное представление решения приведены в первой части работы. Построению аналитического решения данных уравнений посвящена вторая часть.

Полученные решения удобно представлять в виде диспергирующих сейсмограмм, состоящих из временных зависимостей компонент вектора перемещения для различных пространственных координат на поверхности полупространства. Именно такие сейсмограммы могут быть получены экспериментально. Различным аспектам анализа подобных сейсмограмм, получаемых, в частности, при сейсмических измерениях, посвящено много публикаций. В данной работе представляются интересными методы поляризационного [16, 17], частотно-временного [18] и вейвлет анализа [19, 20], которые позволяют экспериментально определить и наглядно интерпретировать такие параметры, как коэффициент эллиптичности, волновое число, фазовую и групповую скорость. Анализ

этих параметров с использованием методов [16–20] приведен в третьей части работы и может служить теоретической основой для возможных экспериментов по идентификации новых материальных параметров упругой среды Коссера.

2. Постановка задачи. Приведем основные соотношения для упругой среды Коссера [1]:

уравнения движения

$$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T : \tilde{\mathbf{E}} + \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{Y} = j \ddot{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.1)$$

геометрические соотношения

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \tilde{\boldsymbol{\chi}} = \nabla \boldsymbol{\omega} \quad (2.2)$$

физические уравнения

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(S)} + 2\alpha \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \tilde{\mathbf{e}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}} = 2\gamma \tilde{\boldsymbol{\chi}}^{(S)} + 2\varepsilon \tilde{\boldsymbol{\chi}}^{(A)} + \beta I_1(\tilde{\boldsymbol{\chi}}) \tilde{\mathbf{e}}. \quad (2.3)$$

С учетом соотношений (2.1)–(2.3) уравнения движения для вектора перемещения \mathbf{u} и вектора поворота $\boldsymbol{\omega}$ имеют вид

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda) \text{grad div } \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \text{rot rot } \mathbf{u} + 2\alpha \text{rot } \boldsymbol{\omega} + \mathbf{X} &= \rho \ddot{\mathbf{u}} \\ (\beta + 2\gamma) \text{grad div } \boldsymbol{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \boldsymbol{\omega} + 2\alpha \text{rot } \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Y} &= \rho \ddot{\boldsymbol{\omega}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

В (2.1)–(2.4) \mathbf{X} – вектор массовых сил; \mathbf{Y} – вектор массовых моментов; \mathbf{u} – вектор перемещения; $\boldsymbol{\omega}$ – вектор вращения; $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$ – тензоры деформаций и изгиба-кручения; $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ – тензоры напряжений и моментных напряжений; μ, λ – постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – физические постоянные материала в рамках упругой среды Коссера; ρ – плотность; j – плотность момента инерции (мера инерции среды при вращении); $\tilde{\mathbf{E}}$ – тензор Леви-Чивиты третьего ранга; $(\cdot)^{(S)}$ – операция симметрирования; $(\cdot)^{(A)}$ – операция альтернирования; $\nabla(\cdot)$ – набла-оператор; $I_1(\cdot)$ – первый инвариант тензора; $\tilde{\mathbf{e}}$ – единичный тензор [21].

В отличие от классической теории тензоры $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ являются несимметричными.

Рассмотрим полупространство, поверхность которого свободна от нагрузок в случае отсутствия массовых сил и моментов. Оси декартовых координат x и y направим по поверхности, а ось z – в глубь полупространства. Будем считать, что волна распространяется в направлении оси x . Многие авторы [3, 11, 12] ищут решение системы (2.4), описывающее поверхностную волну, в виде монохроматической волны $\mathbf{u}(x, z, t) = \{U_x(z), 0, U_z(z)\} e^{i(kx + ft)}$, $\boldsymbol{\omega}(x, z, t) = \{0, W_y(z), 0\} e^{i(kx + ft)}$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, k – волновое число, f – круговая частота (связанная с физической частотой p , измеряемой в Гц, соотношением $f = 2\pi p$), $U_x(z), U_z(z), W_y(z)$ – зависящие от глубины функции затухания, а физический смысл имеют только вещественные части данных комплекснозначных функций.

Следуя другой методике [13–15], общее решение этой системы можно представить также в виде Фурье-интеграла, что соответствует представлению решения как ограниченного во времени и Фурье-пространствах волнового пакета произвольной формы

$$\begin{aligned} u_x(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} U_x(z) e^{i(ft + kx)} \hat{S}_0(f) df, \\ u_z(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} U_z(z) e^{i(ft + kx)} \hat{S}_0(f) df, \quad \omega_y(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} W_y(z) e^{i(ft + kx)} \hat{S}_0(f) df \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\hat{S}_0(f)$ – комплексная спектральная функция, соответствующая Фурье-спектру сигнала-источника и определяющая форму волнового пакета. Представление (2.5) описывает волну, бегущую в отрицательном направлении, при изменении знака в слагаемом kx здесь и в дальнейших выкладках совершенно аналогично получим решение для волны, бегущей в положительном направлении.

Граничные условия на свободной поверхности полупространства запишутся в виде

$$\sigma_{zx} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \mu_{zx} = 0, \quad \mu_{zy} = 0, \quad \mu_{zz} = 0 \quad (2.6)$$

3. Построение решения. Оправданным в данном случае является выполнение непрерывного Фурье-преобразования уравнений движения (2.4) и представления (2.5). Для исследования распространения волн в упругом полупространстве подобный подход использовался в [15].

Прямое и обратное преобразование Фурье в данной работе будем использовать в виде [22]:

$$\hat{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-ift} dt, \quad S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(f) e^{ift} df \quad (3.1)$$

где крышкой сверху обозначается комплексная функция Фурье-образа исходной функции $S(t) \in L^2(\mathbb{R})$, определенной на всей действительной оси и обладающей конечной энергией (нормой)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt < \infty$$

Это дает следующую систему относительно спектров искомых компонент вектора перемещения и поворота (учитываем, что массовых сил и моментов нет):

$$(2\mu + \lambda) \text{grad div } \hat{\mathbf{u}} - (\mu + \alpha) \text{rot rot } \hat{\mathbf{u}} + 2\alpha \text{rot } \hat{\boldsymbol{\omega}} + \rho f^2 \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.2)$$

$$(\beta + 2\gamma) \text{grad div } \hat{\boldsymbol{\omega}} - (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \hat{\boldsymbol{\omega}} + 2\alpha \text{rot } \hat{\mathbf{u}} - (4\alpha - j f^2) \hat{\boldsymbol{\omega}} = 0$$

Фурье-преобразование представления (2.5) дает

$$\hat{\mathbf{u}} = \{U_x(z), 0, U_z(z)\} e^{ikx} \hat{S}_0(f), \quad \hat{\boldsymbol{\omega}} = \{0, W_y(z), 0\} e^{ikx} \hat{S}_0(f) \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.2), получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно функций $U_x(z)$, $U_z(z)$, $W_y(z)$:

$$(\alpha + \mu) \frac{d^2}{dz^2} U_x(z) + (\rho f^2 - k^2(\lambda + 2\mu)) U_x(z) + ik(\lambda + \mu - \alpha) \frac{d}{dz} U_z(z) - 2\alpha \frac{d}{dz} W_y(z) = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d^2}{dz^2} U_z(z) + (\rho f^2 - k^2(\alpha + \mu)) U_z(z) + ik(\lambda + \mu - \alpha) \frac{d}{dz} U_x(z) + 2ik\alpha W_y(z) = 0 \quad (3.4)$$

$$(\gamma + \varepsilon) \frac{d^2}{dz^2} W_y(z) + (j f^2 - k^2(\gamma + \varepsilon) - 4\alpha) W_y(z) + 2\alpha \frac{d}{dz} U_x(z) - 2ik\alpha \frac{d}{dz} U_z(z) = 0$$

Для удобства представления решения все величины приведем к безразмерному виду с использованием характерного размера X_0 и характерной частоты f_0 . Дополнительно введем две безразмерных величины, одна из которых зависит от характерного размера.

Эти величины уже были использованы авторами ранее для анализа аналитических решений двумерных статических задач для среды Коссера [23]:

$$A = X_0 \sqrt{\frac{\mu}{B(\gamma + \varepsilon)}}, \quad B = \frac{\alpha + \mu}{\alpha} \quad (3.5)$$

Для учета динамических эффектов будем использовать четыре безразмерных параметра, два из которых являются аналогами скорости продольной и поперечной волны, а два дополнительных обусловлены наличием новых материальных констант среды Коссера

$$C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_2^2 = \frac{\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_3^2 = \frac{\alpha + \mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_4^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{j X_0^2 f_0^2} \quad (3.6)$$

Величина C_3 является здесь избыточной и вводится только для сокращения дальнейшей записи.

Таким образом, с учетом соотношений (3.5), (3.6) система уравнений (3.4) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} U_x(z) + \left(\frac{f^2}{C_3^2} - k^2 \frac{C_1^2}{C_3^2} \right) U_x(z) + ik \left(\frac{C_1^2 - C_2^2}{C_3^2} - \frac{1}{B} \right) \frac{d}{dz} U_z(z) - \frac{2}{B} \frac{d}{dz} W_y(z) &= 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} U_x(z) + \left(\frac{f^2}{C_1^2} - k^2 \frac{C_2^2}{C_1^2} \right) U_x(z) + ik \left(\frac{C_1^2 - C_2^2}{C_1^2} - \frac{C_3^2}{BC_1^2} \right) \frac{d}{dz} U_x(z) - \frac{2ikC_3^2}{BC_1^2} W_y(z) &= 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} W_y(z) + \left(\frac{f^2}{C_4^2} - k^2 - \frac{4A^2B}{B-1} \right) W_y(z) + \frac{2A^2B}{B-1} \frac{d}{dz} U_x(z) - \frac{2ikA^2B}{B-1} U_z(z) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для нахождения решения этой системы удобно воспользоваться заменой переменных

$$U_x(z) = ik\Phi(z) - \frac{d}{dz}\Psi(z), \quad U_z(z) = \frac{d}{dz}\Phi(z) + ik\Psi(z), \quad W_y(z) = \Omega(z) \quad (3.8)$$

Эта замена позволяет преобразовать (3.7) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \Phi(z) + \left(\frac{f^2}{C_1^2} - k^2 \right) \Phi(z) &= 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} \Psi(z) + \left(\frac{f^2}{C_3^2} - k^2 \right) \Psi(z) + \frac{2}{B} \Omega(z) &= 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} \Omega(z) + \left(\frac{f^2}{C_4^2} - k^2 - \frac{4A^2B}{B-1} \right) \Omega(z) - \frac{2A^2B}{B-1} \frac{d^2}{dz^2} \Psi(z) + \frac{2k^2A^2B}{B-1} \Psi(z) &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Решения системы (3.9), соответствующие уменьшению амплитуды волны с глубиной, имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= D_0 e^{-v_0 z}, \quad \Psi(z) = D_1 e^{-v_1 z} + D_2 e^{-v_2 z} \\ \Omega(z) &= \frac{B}{2} \left\{ D_1 \left(k^2 - v_1 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{-v_1 z} + D_2 \left(k^2 - v_2 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{-v_2 z} \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решения (3.10) и соотношения (3.8) позволяют определить вид амплитудных функций $U_x(z)$, $U_z(z)$, $W_y(z)$:

$$\begin{aligned} U_x(z) &= ikD_0 e^{-v_0 z} + D_1 v_1 e^{-v_1 z} + D_2 v_2 e^{-v_2 z} \\ U_z(z) &= -D_0 v_0 e^{-v_0 z} + ikD_1 e^{-v_1 z} + ikD_2 e^{-v_2 z} \\ W_y(z) &= \frac{B}{2} \left\{ D_1 \left(k^2 - v_1 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{-v_1 z} + D_2 \left(k^2 - v_2 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{-v_2 z} \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

где константы D_k должны быть определены из граничных условий, а собственные значения v_k определяются выражениями

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{k^2 - f^2/C_1^2}, \quad v_1 = \sqrt{k^2 - a_1}, \quad v_2 = \sqrt{k^2 - a_2} \\ a_{1,2} &= \frac{C_3^2 + C_4^2}{2C_3^2 C_4^2} f^2 - 2A^2 \pm \sqrt{\frac{(C_3^2 - C_4^2)^2}{4C_3^4 C_4^4} f^4 - \frac{2A^2(C_2^2 C_3^2 - 2C_3^2 C_4^2 + C_2^2 C_4^2)}{C_2^2 C_3^2 C_4^2} f^2 + 4A^4} \end{aligned}$$

При подстановке решения (3.11) в граничные условия (2.6) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно величин D_k , являющихся константами при фиксированных k и f (граничные условия также предварительно обезразмериваются):

$$\begin{bmatrix} 2k^2 - \frac{f^2}{C_2^2} & -2ikv_1 & -2ikv_2 \\ 2ikv_0 & 2k^2 - \frac{f^2}{C_2^2} & 2k^2 - \frac{f^2}{C_2^2} \\ 0 & \left(a_1 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) v_1 & \left(a_2 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) v_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Условие равенства нулю определителя этой системы дает аналог классического уравнения Рэлея [9, 10] относительно неизвестного волнового числа k , зависящего от частоты f :

$$\begin{aligned} &\sqrt{k^2 - a_1} \left(a_1 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) \left\{ \left(2k^2 - \frac{f^2}{C_2^2} \right)^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - a_2} \sqrt{k^2 - \frac{f^2}{C_1^2}} \right\} - \\ &- \sqrt{k^2 - a_2} \left(a_2 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) \left\{ \left(2k^2 - \frac{f^2}{C_2^2} \right)^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - a_1} \sqrt{k^2 - \frac{f^2}{C_1^2}} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

и условия связи констант

$$D_1 = \frac{i(f^2 - 2k^2 C_2^2)(f^2 - a_2 C_3^2)}{2k C_2^2 C_3^2 (a_1 - a_2) v_1} D_0, \quad D_2 = -\frac{i(f^2 - 2k^2 C_2^2)(f^2 - a_1 C_3^2)}{2k C_2^2 C_3^2 (a_1 - a_2) v_2} D_0$$

Возвращаясь к компонентам вектора перемещения и поворота (2.5), окончательно получим

$$\begin{aligned}
 u_x(x, z, t) &= F_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ k e^{-v_0 z} + \frac{F_1}{k} e^{-v_1 z} - \frac{F_2}{k} e^{-v_2 z} \right\} e^{i(ft + kx - \pi/2)} \hat{S}_0(f) df \\
 u_z(x, z, t) &= F_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ v_0 e^{-v_0 z} + \frac{F_1}{v_1} e^{-v_1 z} - \frac{F_2}{v_2} e^{-v_2 z} \right\} e^{i(ft + kx - \pi/2)} \hat{S}_0(f) df \\
 \omega_y(x, z, t) &= F_0 B \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{F_1 e^{-v_1 z}}{2k v_1} \left(a_1 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) - \frac{F_2 e^{-v_2 z}}{2k v_2} \left(a_2 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) \right\} e^{i(ft + kx - \pi/2)} \hat{S}_0(f) df \\
 F_{\lambda} &= \frac{(f^2 - 2k^2 C_2^2)(f^2 - a_{\lambda} C_3^2)}{2C_2^2 C_3^2 (a_1 - a_2)}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

где F_0 – неопределенная константа.

Таким образом, соотношения (3.12)–(3.13) являются решением системы (2.4) с граничными условиями (2.6).

4. Параметрический анализ решения. Основной целью параметрического анализа, выполняемого здесь, является поиск конструктивно измеряемых величин, имеющих качественные и количественные отличия в “моментном” и классическом случае. Здесь и далее все величины, относящиеся к классической среде, будем обозначать символом $(.)^*$.

В эксперименте, когда волна Рэлея генерируется в определенной точке на поверхности полупространства и отклик регистрируется несколькими равноотстоящими друг от друга геофонами, расположенными вдоль распространения волны, возможно получить сейсмограммы компонент перемещений на поверхности. Поэтому для численного анализа сконструируем аналогичную сейсмограмму. В качестве значения материальных параметров выберем значения, приведенные в [7] и соответствующие человеческой кости: $\lambda = 2.8 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu = 4 \cdot 10^9$ Н/м², $\alpha = 4 \cdot 10^9$ Н/м², $\gamma = 1.93 \cdot 10^8$ Н, $\varepsilon = 3.04 \cdot 10^9$ Н. В литературе не удалось найти значение плотности момента инерции j , поэтому выберем это значение произвольно: $j = 1 \cdot 10^{-3}$ кг/м³. Кроме этого, для большей наглядности от круговой частоты f перейдем к физической частоте p , для чего характерную частоту f_0 достаточно выбрать равной $(2\pi)^{-1}$.

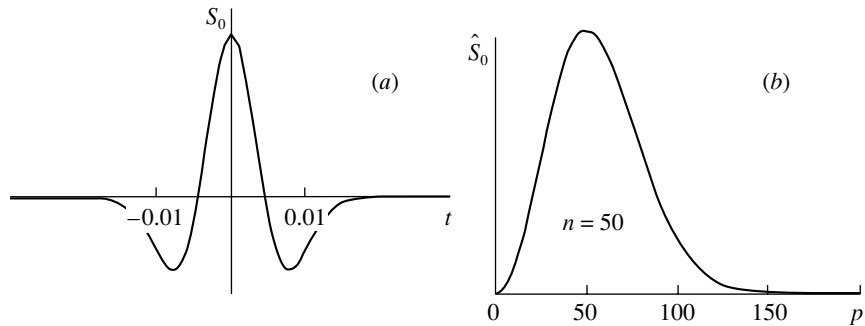
Так как ограничений на выбор сигнала-источника $S_0(t)$ нет, то зададим его в виде вейвлета, спектр которого определяется соотношением (фиг. 1):

$$\hat{S}_0(p) = \frac{2p^2}{n^2 \sqrt{\pi}} e^{-p^2/n^2}, \tag{4.1}$$

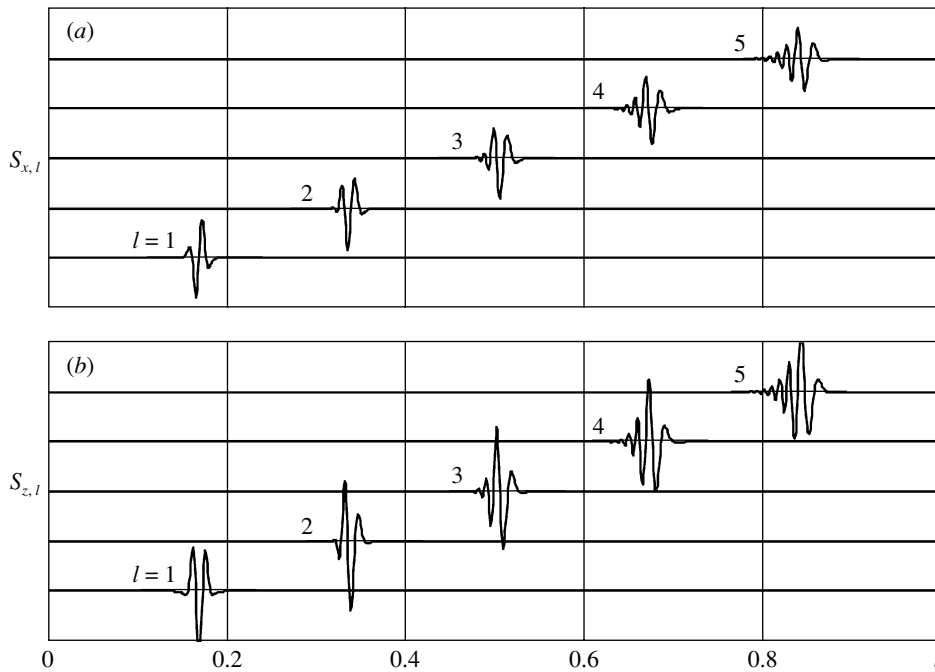
где n – параметр, отвечающий за ширину волнового пакета.

Используя соотношения (3.13), сигнал-источник (4.1) и выполняя процедуру обратного Фурье-преобразования, представим компонентны перемещений на поверхности в виде временных зависимостей $S_{x_i}(t) = u_x(\Delta x_i, 0, t)$ и $S_{z_i}(t) = u_z(\Delta x_i, 0, t)$ для нескольких расстояний Δx_i от источника (фиг. 2).

При выборе характерного размера $X_0 = 1$ дистанции Δx_i , на которых дисперсия является достаточной для эффективного анализа, составляют десятки тысяч метров. Однако из соотношений (3.6) видно, что характерный размер и характерная частота при фиксированном решении обратно пропорциональны, при увеличении частоты сигнала-источника соответственно будут сокращаться и дистанции Δx_i .



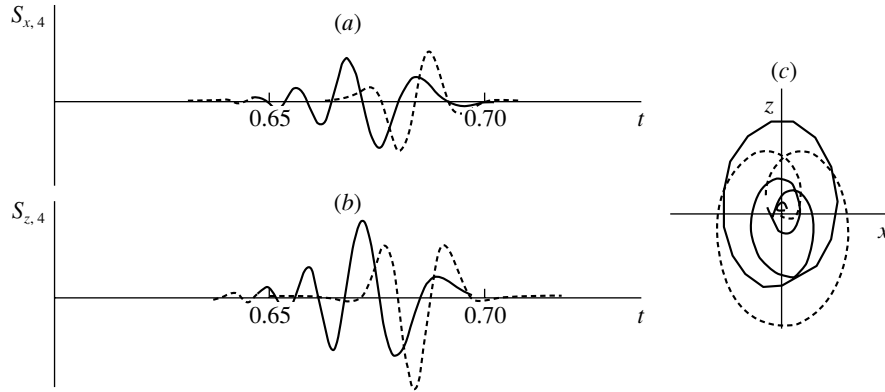
Фиг. 1



Фиг. 2

Поляризационный анализ. Рассмотрим подробно один из сигналов с сейсмограммы фиг. 2, например, $S_{x,4}$ и $S_{z,4}$ в сравнении с классическим случаем (фиг. 3, *a, b*). Штриховой линией изображено соответствующее решение для классической среды, сплошной – новое решение для среды Коссера. Наглядным является также представление компонент перемещений в плоскости $\{x, z\}$ (фиг. 3, *c*). Вид решения (3.13) определяет, что траекторией движения любой частицы является эллипс, большая ось R которого направлена по оси z , а малая r – по оси x .

Зависимости, приведенные на фиг. 3, позволяют предположить, что в качестве первой экспериментально измеряемой величины можно выбрать коэффициент эллиптичности $E = r/R$, который на поверхности полупространства $z = 0$ не зависит от координаты x , однако является функцией частоты и упругих параметров материала.



Фиг. 3

Для определения коэффициента эллиптичности можно воспользоваться одним из двух методов, получивших широкое применение при анализе сейсмических данных.

1. Временные зависимости $R(t)$ и $r(t)$ большой и малой полуосей эллипсов можно определить с использованием метода комплексного следа [16]. В его основе лежит преобразование вещественных компонент $S_x(t)$ и $S_z(t)$ перемещений к комплексным при помощи преобразования Гильберта $S_x^H(t)$ и $S_z^H(t)$ [24]:

$$Z_x(t) = [S_x(t) + iS_x^H(t)]/2, \quad Z_z(t) = [S_z(t) + iS_z^H(t)]/2$$

Для полученных таким образом комплексных сигналов $Z_x(t)$ и $Z_z(t)$ по-отдельности рассматриваются вещественные и мнимые части и определяется фазовый сдвиг $\theta(t) = \arg(\overline{Z_x(t)} Z_z(t))$, где $\overline{(\cdot)}$ обозначает комплексное сопряжение. С использованием фазового сдвига вычисляются большая $R(t)$ и малая $r(t)$ полуоси

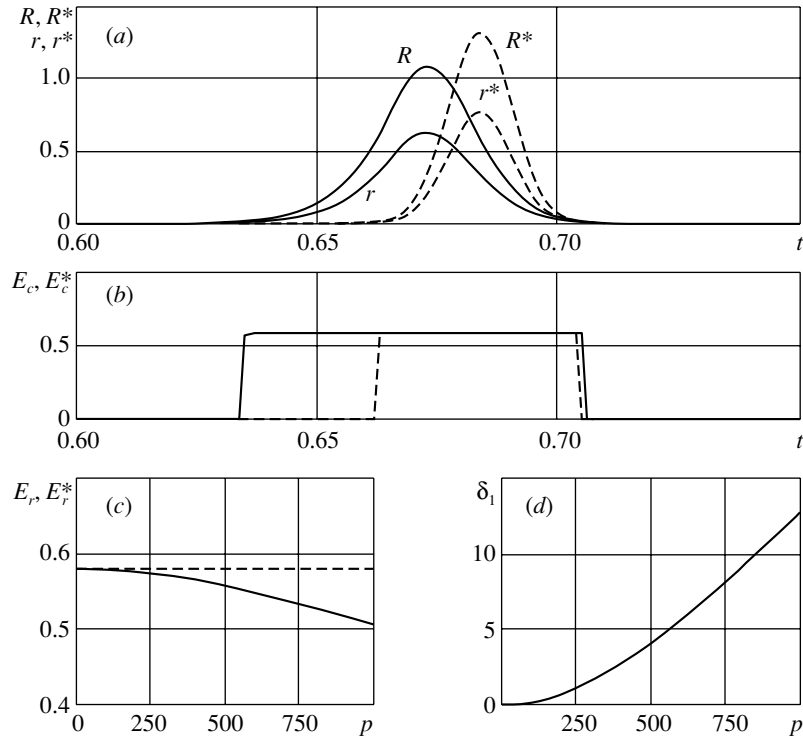
$$\begin{aligned} R^2(t) &= Z_0(t) + \sqrt{Z_1^2(t) + Z_2^2(t)}, & r^2(t) &= Z_0(t) - \sqrt{Z_1^2(t) + Z_2^2(t)} \\ Z_0(t) &= |Z_x(t)|^2 + |Z_z(t)|^2, & Z_1(t) &= |Z_x(t)|^2 - |Z_z(t)|^2 \\ Z_2(t) &= 2|Z_x(t)||Z_z(t)|\cos(\theta(t)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для полученных таким образом полуосей определим коэффициент эллиптичности следующим образом: $E_c(t) = r(t)/R(t)$.

2. В сейсмологии широко используется также метод Накамура [17] (H/V метод), который позволяет определить коэффициент эллиптичности как функцию частоты и базируется на вычислении отношения Фурье-спектров горизонтальной и вертикальной компонент перемещений на некотором удалении от источника

$$E_r(p) = \hat{S}_x(p)/\hat{S}_z(p) \quad (4.3)$$

Близость коэффициента эллиптичности для классической среды и для среды Коссера будем оценивать величиной $\delta_1 = |(E_r - E_r^*)/E_r^*| \cdot 100\%$. Кривые, изображенные на фиг. 4, демонстрируют все вышеприведенные параметры эллиптичности для компонент $S_{x,4}$ и $S_{z,4}$ с фиг. 3. Из этих кривых следует, что влияние моментного описания поведения ма-



Фиг. 4

териала на величину δ_1 (наличие “моментных” эффектов) значительно усиливается при увеличении частоты. Это объясняется тем, что геометрия и, следовательно, эллиптичность рэлеевской волны для классической упругой среды от частоты не зависит.

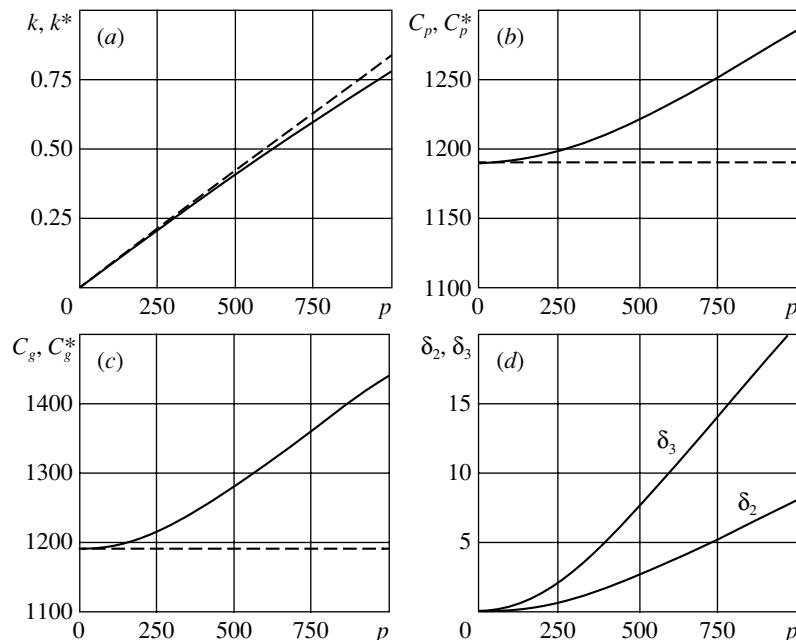
Дисперсионный анализ. Как видно из фиг. 3, *a, b* и 4, *a, b*, рэлеевские волны в среде Коссера “расплываются” со временем по-сравнению с волнами в классической среде. Таким образом, в отличие от классической среды, волны Релея в среде Коссера обладают дисперсией, что согласуется с экспериментальными исследованиями [6]. Именно этот факт, не имеющий аналогов в классической теории упругости, может быть использован для проверки адекватности несимметричной теории реальным конструкционным материалам.

Для характеристики дисперсии можно использовать одну из следующих величин, которые зависят только от материальных параметров среды и от частоты.

1. Волновое число $k(p)$. Оно не может быть измерено непосредственно, однако можно использовать несложную вычислительную процедуру, базирующуюся на использовании Фурье-преобразования. Из соотношений (2.5) следует, что

$$S_{x,j}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{x,l}(f) e^{ik(f)(\Delta x_j - \Delta x_l) + 2\pi i N} e^{ift} df \quad (4.4)$$

где N – любое целое число. Это соотношение может быть относительно легко инвертировано при помощи какого-либо метода оптимизации, необходимо только учитывать, что из-за неопределенной константы N нужно брать для оптимизации больше чем два сигнала.



Фиг. 5

2. Фазовая скорость $C_p(p) = p/k(p)$. С этой скоростью переносится каждое постоянное значение фазы элементарного волнового пакета соответствующей частоты. Для классической среды фазовая скорость от частоты не зависит, волны Релея в классической среде бездисперсионны.

3. Групповая скорость $C_g(p) = 1/k'(p)$. Групповая скорость определяет скорость, с которой энергия распространяется в пространстве при волновом движении среды и в данном случае не совпадает с фазовой скоростью волны. Формально кривая групповой скорости не несет дополнительной информации о среде по сравнению с кривой фазовой скорости, тем не менее обе они активно используются для интерпретации сигналов. Это связано с тем, что групповая скорость измеряется проще, чем фазовая. Для классической среды групповая скорость совпадает с фазовой и не зависит от частоты.

Для сравнения близости фазовой и групповой скоростей для классической среды и для среды Коссера введем еще две величины сравнения: $\delta_2 = |(C_p - C_p^*)/C_p^*| \cdot 100\%$ и $\delta_3 = |(C_g - C_g^*)/C_g^*| \cdot 100\%$. Зависимости волнового числа, фазовой скорости, групповой скорости и этих величин от частоты приведены на фиг. 5.

Интерпретация скоростей с использованием вейвлет-анализа. Показательным является анализ сеймограммы, изображенной на фиг. 2, в частотно-временной плоскости с использованием непрерывного вейвлет-преобразования. Это позволяет наглядно продемонстрировать смысл скоростей и предложить возможные пути измерения. Теория непрерывного вейвлет-преобразования сигналов хорошо развита в [19], здесь же приведем лишь основные соотношения. Прямое и обратное вейвлет-преобразование действительного сигнала $S(t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
 W_g S(t, p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{p_0} \hat{h}\left(\frac{p(\tau-t)}{p_0}\right) S(\tau) d\tau \\
 S(t) &= \frac{1}{C_{gh}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}\left(\frac{p(t-\tau)}{p_0}\right) W_g S(\tau, p) d\tau \frac{dp}{p_0} \\
 C_{gh} &= \int_0^{+\infty} \{\hat{g}(f)\hat{h}(f) + \overline{\hat{g}(-f)}\hat{h}(-f)\} \frac{df}{f}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $g(\cdot), h(\cdot) \in L^2(P)$ – вещественные или комплексные вейвлеты, p_0 – средняя частота вейвлета, C_{gh} – нормализующий коэффициент, а $W_g S(t, p)$ – комплексный вейвлет-образ, зависящий от частотного $p \in \mathbb{R}^+$ и временного $t \in \mathbb{R}$ факторов. Таким образом, в отличие от Фурье-преобразования (3.1), вейвлет-преобразование обеспечивает двумерную развертку исследуемого сигнала, при этом частота и время рассматриваются как независимые переменные. В результате появляется возможность анализировать свойства сигнала одновременно в физическом (время) и масштабном (частота) пространствах.

Как правило, и для прямого, и для обратного преобразований выбирают одинаковый вейвлет, который называют анализирующим. Выбор анализирующего вейвлета определяется тем, какие характерные колебательные формы содержатся в сигнале. Для анализа рассматриваемых здесь волн более подходящими являются комплексный вейвлет Морле [20]:

$$g(t) = e^{2\pi i t p_0} e^{-t^2/(2n^2)}, \quad \hat{g}(f) = n e^{-n^2(f-2\pi p_0)^2/2} \tag{4.6}$$

где n – параметр вейвлета.

Комплексные вейвлет-коэффициенты $W_g S(t, p)$ содержат информацию о частотно-временном распределении амплитуд $A(t, p)$ и фаз $\Phi(t, p)$ в сигнале, которые при использовании вейвлета Морле можно разделить

$$\begin{aligned}
 W_g S(t, p) &= A(t, p) e^{i\Phi(t, p)} \\
 A(t, p) &= |W_g S(t, p)|, \quad \Phi(t, p) = \arg(W_g S(t, p))
 \end{aligned}$$

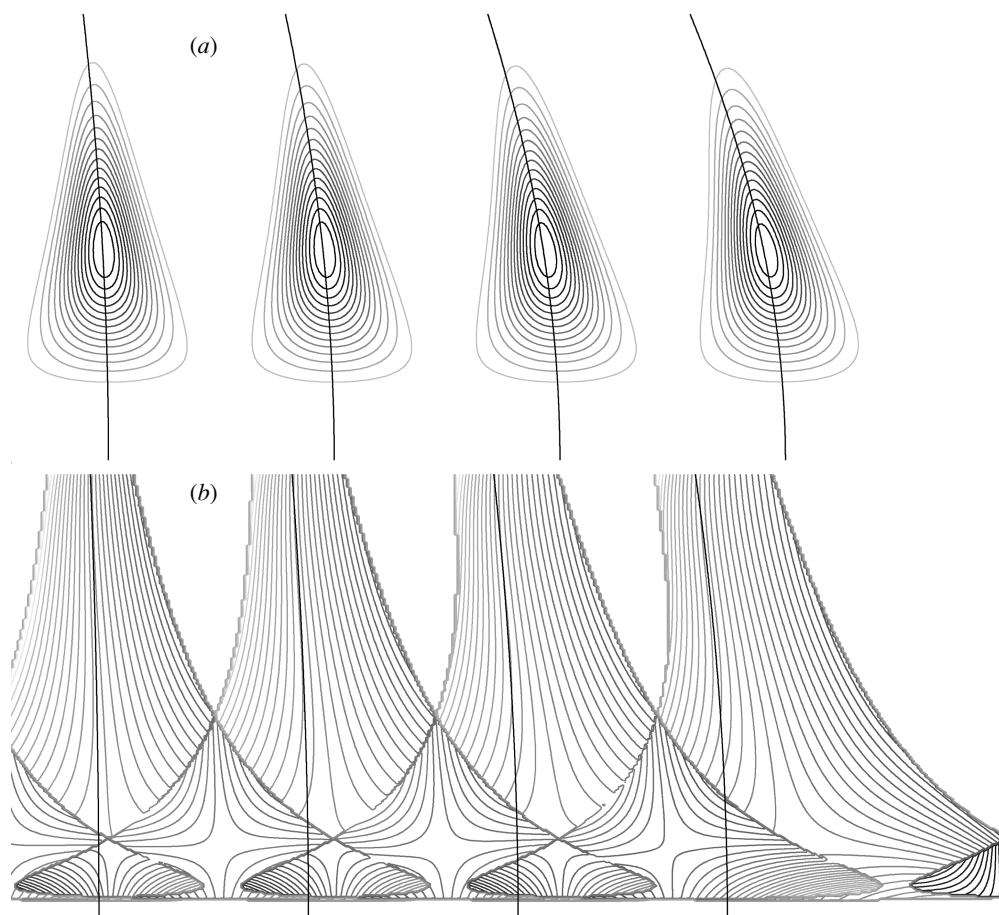
Вейвлет-спектр компонент $S_{z,l}$ сейсмограммы (фиг. 2), изображен на фиг. 6. По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат – частота. Фиг. 6, *a* демонстрирует частотно-временное распределение модулей $A(t, p)$ вейвлет-коэффициентов, а фиг. 6, *b* – фаз $\Phi(t, p)$. На самом деле фаза является сильно колеблющейся величиной, здесь же для сглаживания этих колебаний использован алгоритм двумерного 2π -сглаживания [25].

Сплошными линиями на фиг. 6 приведены кривые $G_l(p)$ и $P_l(p)$, вычисленные при помощи следующих соотношений:

$$G_l(p) = \frac{d_l}{2\pi C_g(p)}, \quad P_l(p) = \frac{d_l}{2\pi C_p(p)}$$

Отсюда видно, что групповая скорость $C_g(p)$ определяет частотное искажение модулей вейвлет-коэффициентов в процессе распространения колебаний, а фазовая скорость $C_p(p)$ – искажение фаз. Математически этот факт доказан в [26].

5. Заключение. В работе получено и проанализировано аналитическое решение уравнений эластокинетики среды Коссера для задачи о распространении поверхностной акустической волны Рэлея, которая представляется в виде волнового пакета произволь-



Фиг. 6

ной формы, ограниченного как во временном, так и в Фурье пространстве. Качественный и численный анализ этого решения, а также зависимостей, представленных на фиг. 2–6, позволяет сделать следующие выводы: в отличие от плоских статических задач несимметричной теории упругости [23], решение волнового уравнения для рэлеевской волны не представимо в виде суммы классических и моментных частных решений; для характеристики отличий решения, полученного в рамках среды Коссера от классического случая можно использовать такие параметры, как коэффициент эллиптичности, волновое число, фазовую и групповую скорости; в отличие от классического случая все эти параметры зависят от частоты; при увеличении частоты различия между значениями этих параметров для классического и несимметричного случаев возрастают; для эффективной интерпретации фазовой и групповой скорости, а также для их определения в возможном эксперименте оправданно использование аппарата вейвлет-анализа; все эти параметры могут быть измерены в процессе возможного эксперимента, реализуемого с целью обнаружения эффектов “моментных” свойств среды (информативность параметров с точки зрения проявления этих свойств подтверждается приведенными графическими зависимостями).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00561).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Пальмов В.А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401–408.
3. *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theories. I. Foundation and Solids. N.Y.: Springer, 1998. 325 p.
4. *Морозов Н.Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 182 с.
5. *Gauthier R.D., Jahsman W.E.* A quest for micropolar elastic constants // Trans. ASME: J. Appl. Mech. 1975. V. 42. № 2. P. 369–374.
6. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1999. 327 с.
7. *Lakes R.S.* Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua // Continuum Models for Materials with Micro-structure / Ed. H. Muhlhaus. N. Y.: Wiley, 1995. Ch. 1. P. 1–22.
8. *Gauthier R.D., Jahsman W.E.* A quest for micropolar elastic constants. Pt 2 // Arch. Mech. 1981. V. 33. № 5. P. 717–737.
9. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.:Наука, 1981. 287 с.
10. *Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.:Наука, 1991. 415 с.
11. *Adomeit G.* Ausbreitung elastischer Wellen und Bestimmung von Materialkonstanten im Cosserat – Kontinuum. Aachen: Techn. Hochschule, 1967. 78 s.
12. *Лялин А.Е., Пирожков В.А., Степанов Р.Д.* О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. ж. 1982. Т. 28. № 6. С. 838–840.
13. *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. М.: Мир, 1983. 136 с.
14. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 568 с.
15. *Achenbach J.D.* Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam; London: North-Holland, 1973. 425 p.
16. *Rene R.M., Fitter J.L., Forsyth P.M., Kim K.Y., Murray D.J., Walters J.K., Westerman J.D.* Multi-component seismic studies using complex trace analysis // Geophysics. 1986. V. 51. № 6. P. 1235–1251.
17. *Nakamura Y.* A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface // Quart. Report Railway Techn. Research Inst. 1989. V. 30. № 1. P. 25–33.
18. *Левшин А.Л., Яновская Т.Б., Ландер А.В. и др.* Поверхностные сейсмические волны в горизонтально-неоднородной земле. М.:Наука, 1986. 278 с.
19. *Holschneider M.* Wavelets: An Analysis Tool. Oxford: Clarendon Press, 1995. 423 p.
20. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166. № 11. С. 1145–1170.
21. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
22. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. 832 с.
23. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости // Изв. РАН, МТТ. 2002. № 5. С. 69–82.
24. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. 540 с.
25. *Ghiglia D.G., Romero L.A.* Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods // J. Opt. Soc. America. A. 1994. V. 11. № 1. P. 107–117.
26. *Kulesh M., Holschneider M., Diallo M.S., Xie Q., Scherbaum F.* Modeling of wave dispersion using continuous wavelet transforms // Pure and Appl. Geophys. 2005. V. 5. № 162. P. 843–855.

Пермь

Поступила в редакцию
15.09.2004