

Аналитические и численные решения статических и динамических задач несимметричной теории упругости

В.В. Корепанов, М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, 614013, Россия

В рамках данной работы получен ряд новых аналитических решений статических и динамических волновых задач для линейной упругой среды Коссера. Приведено сравнение с соответствующими аналитическими решениями в рамках классической теории упругости и на модельных материалах проиллюстрированы проявления моментных эффектов. Параллельно с получением аналитических решений и на основе метода конечных элементов были разработаны численные алгоритмы решения задач несимметричной теории упругости о статическом деформировании. На основе этих алгоритмов получен ряд численных результатов, которые существенно дополнили рассмотренный класс аналитических решений. Полученные результаты являются основой для постановки физических экспериментов, направленных на установление фактов моментного поведения материалов при их упругом деформировании.

Analytical and numerical solutions for static and dynamic problems of the asymmetric theory of elasticity

V.V. Korepanov, M.A. Kulesh, V.P. Matveenko, and I.N. Shardakov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, 614013, Russia

The paper offers a number of new analytical solutions of static and dynamic wave problems for a linear elastic Cosserat continuum. We compare them to corresponding analytical solutions within the classical theory of elasticity and illustrate the manifestations of moment effects using model materials. Concurrently with the derivation of analytical solutions, the finite-element method has been used to develop a numerical solution algorithm for problems of the asymmetric theory of elasticity on static deformation. The algorithms gave rise to numerical results that significantly expand the considered class of analytical solutions. The obtained results provide the basis for the performance of physical experiments that investigate moment behavior of materials under elastic deformation.

1. Введение

В линейной модели Коссера [1] каждая материальная точка среды является малым абсолютно твердым телом и имеет ориентацию (полярная среда), а нагрузка на произвольную область тела передается посредством распределенного усилия $\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ и распределенного момента $\mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}$, действующих на поверхности с нормалью \mathbf{n} (рис. 1, а).

В силу того, что нагрузка на элементарный объем тела осуществляется также и посредством момента сил, для среды вводится независимая кинематическая характеристика, с которой связана работа данного вращающего момента. Этой характеристикой является вектор поворота $\boldsymbol{\omega}$. Можно предложить следующую модельную интерпретацию логики введения этого вектора. Пусть

произвольная область тела (рис. 1, б) состоит из абсолютно твердых частиц, имеющих, в отличие от классической теории упругости, линейный размер L и связанных между собой упруго, но эти связи действуют на внешний край частиц. В этом случае кинематика частицы будет определяться вектором перемещения центра масс \mathbf{u} и вектором поворота $\boldsymbol{\omega}$. В случае континуума Коссера эти векторы являются непрерывными функциями, т.е. каждой материальной точке приписываются свойства частицы, имеющей масштаб и ориентацию. Таким образом, в среде появляются дополнительные физические параметры, характеризующие линейный размер и момент инерции частиц, а также свойства связей относительно вращения, а основные соотношения для линейной упругой среды Коссера имеют вид [2]:

уравнения движения:

$$\nabla \cdot \tilde{\sigma} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\sigma}^T : \tilde{\mathbf{E}} + \nabla \cdot \tilde{\mu} + \mathbf{Y} = j \ddot{\boldsymbol{\omega}},$$

геометрические соотношения:

$$\tilde{\gamma} = \nabla \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \tilde{\chi} = \nabla \boldsymbol{\omega},$$

физические уравнения:

$$\tilde{\sigma} = 2\mu \tilde{\gamma}^{(S)} + 2\alpha \tilde{\gamma}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\gamma}) \tilde{\mathbf{e}},$$

$$\tilde{\mu} = 2\gamma \tilde{\chi}^{(S)} + 2\varepsilon \tilde{\chi}^{(A)} + \beta I_1(\tilde{\chi}) \tilde{\mathbf{e}}.$$

С учетом данных соотношений уравнения движения для вектора перемещения \mathbf{u} и вектора поворота $\boldsymbol{\omega}$ примут вид:

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda) \text{grad div } \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \text{rot rot } \mathbf{u} + \\ + 2\alpha \text{rot } \boldsymbol{\omega} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ (2\gamma + \beta) \text{grad div } \boldsymbol{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \boldsymbol{\omega} + \\ + 2\alpha \text{rot } \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Y} = j \ddot{\boldsymbol{\omega}}. \end{aligned} \quad (1)$$

В приведенных выше уравнениях \mathbf{X} — вектор удельной плотности объемных сил; \mathbf{Y} — вектор удельной плотности объемных моментов; \mathbf{u} — вектор перемещения; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор поворота; $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\chi}$ — тензоры деформаций и изгиба-кручения; $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\mu}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений; μ, λ — постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — физические постоянные материала в рамках моментной теории упругости; ρ — плотность; j — плотность момента инерции (мера инерции среды при вращении); $\tilde{\mathbf{E}}$ — тензор Леви-Чивиты третьего ранга; $(\cdot)^{(S)}$ — операция симметрирования; $(\cdot)^{(A)}$ — операция альтернирования; $\nabla(\cdot)$ — набла-оператор; $I_1(\cdot)$ — первый инвариант тензора. В отличие от классической теории тензоры $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\sigma}$ являются несимметричными. Однако несложно видеть, что в случае равенства нулю новых материальных констант $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, j$ соотношения (1) трансформируются в уравнения Ламе классической теории упругости.

Для сравнительного анализа будем также рассматривать модель псевдосреды Коссера [2] или среды со

стесненным вращением, в которой сохраняется концепция классической теории упругости, когда вектор перемещений \mathbf{u} точек этой среды и вектор поворота $\boldsymbol{\omega}$ связаны зависимостью

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u} / 2, \quad (2)$$

а физические соотношения и уравнения движения для этой среды имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} = 2\mu \gamma^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\gamma}) \tilde{\mathbf{e}} - \frac{1}{2} \nabla \cdot \tilde{\mu} \cdot \tilde{\mathbf{E}}, \\ \tilde{\mu} = 2\gamma \tilde{\chi}^{(S)} + 2\varepsilon \tilde{\chi}^{(A)}, \\ \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \text{grad div } \mathbf{u} + \\ + \frac{1}{4} (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, для псевдосреды Коссера имеется одна независимая кинематическая неизвестная — вектор перемещения \mathbf{u} и в рассмотрение вводятся несимметричные тензоры напряжений $\tilde{\sigma}$ и моментных напряжений $\tilde{\mu}$. Псевдосреда Коссера является частным случаем среды Коссера при условии $\alpha \rightarrow \infty$. Необходимо отметить, что соотношение (2) не позволяет в трехмерном случае сформулировать необходимое число независимых краевых условий. Например, если на поверхности заданы перемещения, то не удастся независимо выразить нормальную составляющую вектора поворота. Аналогично обстоит дело и с условиями в нагрузках.

Известны и другие частные случаи модели среды Коссера, например, редуцированная среда Коссера, для которой $\beta = \gamma = \varepsilon = 0$ и, как следствие, отсутствует тензор моментных напряжений. Впервые эта модель была исследована в изотропном случае в [3]. Для описания этой среды используются следующие физические соотношения и уравнения движения:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} = 2\mu \tilde{\gamma}^{(S)} + 2\alpha \tilde{\gamma}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\gamma}) \tilde{\mathbf{e}}, \\ (2\mu + \lambda) \text{grad div } \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \text{rot rot } \mathbf{u} + \\ + 2\alpha \text{rot } \boldsymbol{\omega} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ 2\alpha \text{rot } \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Y} = j \ddot{\boldsymbol{\omega}}. \end{aligned} \quad (4)$$

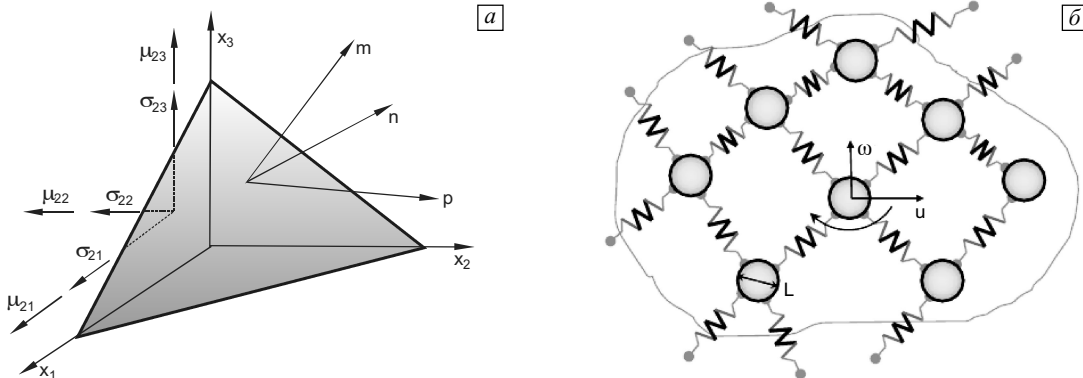


Рис. 1. Модель среды Коссера

Однако несложно убедиться, что в статическом случае ($\dot{\omega} = 0$) и при отсутствии объемных моментов ($\mathbf{Y} = 0$) данные уравнения преобразуются к классическим уравнениям Ламе, где вектор поворота будет определяться соотношением (2), поэтому в дальнейшем данная модель нами рассматриваться не будет.

Анализ публикаций по моментной теории свидетельствует о том, что с момента опубликования работы братьев Коссера [1] интерес к этой теории возрастает с периодичностью примерно в 30 лет. В настоящий момент мы наблюдаем очередной пик интереса к этой теме в связи с зарождающейся наукой микромеханикой и нанотехнологиями. Однако следует отметить, что в подавляющем большинстве эти работы имеют сугубо теоретический характер. Одной из главных причин, ограничивающих практические приложения несимметричной теории упругости, является отсутствие надежных методов определения материальных констант. Другим важным обстоятельством является недостаточное количество экспериментов, свидетельствующих о моментных эффектах при упругом деформировании материалов.

Важным условием преодоления этих проблем является получение и анализ новых решений задач несимметричной теории упругости. Цель анализа получаемых решений — определение таких значений параметров (характерные геометрические размеры, их соотношение и т.п.), при которых отклик моментных свойств материала на какую-либо макровеличину (экспериментально измеряемую) максимален. Таким образом, результаты анализа позволят определить наиболее информативные принципиальные схемы возможных экспериментов. Именно проведение подобного анализа и явилось целью данной работы и выполнено на примере решения некоторых статических и динамических задач.

2. Аналитические решения статических задач несимметричной теории упругости

В качестве попытки отыскания моментных эффектов при статическом деформировании авторами был проанализирован класс задач, когда напряженно-деформированное состояние в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) зависит только от координат ρ и φ . Данный класс задач характеризуется тем, что решение для него можно представить в виде отрезка ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\rho, \varphi) &= \{u_\rho(\rho, \varphi), u_\varphi(\rho, \varphi), 0\}^T, \\ u_\rho(\rho, \varphi) &= U^{(0)}(\rho) + U^{(1)}(\rho) \cos \varphi + \\ &+ \sum_{n=2}^N U^{(n)}(\rho) \cos(n\varphi), \\ u_\varphi(\rho, \varphi) &= V^{(0)}(\rho) + V^{(1)}(\rho) \sin \varphi + \\ &+ \sum_{n=2}^N V^{(n)}(\rho) \sin(n\varphi), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(\rho, \varphi) &= \{0, 0, \omega_z(\rho, \varphi)\}^T, \\ \omega_z(\rho, \varphi) &= \omega^{(0)}(\rho) + \omega^{(1)}(\rho) \sin \varphi + \\ &+ \sum_{n=2}^N \omega^{(n)}(\rho) \sin(n\varphi). \end{aligned}$$

Такая форма записи решения будет соответствовать полному отрезку ряда Фурье, если в соотношениях (5) $\cos(\cdot)$ заменить на $\sin(\cdot)$, а $\sin(\cdot)$ на $-\cos(\cdot)$. Считаем, что краевые условия представимы рядами, аналогичными (5). Подставляя векторы перемещений и поворота (5) в уравнения (1), получим систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье $U^{(n)}(\rho), V^{(n)}(\rho), \omega^{(n)}(\rho)$. В силу того, что рассматриваемые области являются телами вращения, данная система распадается на три независимых системы относительно нулевой ($n = 0$), первой ($n = 1$) и старших гармоник. Например, для коэффициентов нулевой гармоники система разрешающих уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} U^{(0)}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} U^{(0)}(\rho) - \frac{1}{\rho^2} U^{(0)}(\rho) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\rho^2} V^{(0)}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} V^{(0)}(\rho) - \frac{1}{\rho^2} V^{(0)}(\rho) - \\ - \frac{2\alpha}{\alpha + \mu} \frac{d}{d\rho} \omega^{(0)}(\rho) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\rho^2} \omega^{(0)}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \omega^{(0)}(\rho) - \frac{4\alpha}{\gamma + \varepsilon} \omega^{(0)}(\rho) + \\ + \frac{2\alpha}{\gamma + \varepsilon} \frac{d}{d\rho} V^{(0)}(\rho) + \frac{2\alpha}{(\gamma + \varepsilon)\rho} V^{(0)}(\rho) &= 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение данной системы описывает решение классической задачи Ламе [4] и не связано с двумя последующими уравнениями этой системы, которые, в свою очередь, описывают задачу кручения несимметричного упругого материала. Из этого видно, что наимпростейшей задачей, для которой уже проявляются моментные свойства среды, является задача кручения.

При построении общих решений получающихся систем используется известный факт о том, что частные решения соответствующих краевых задач симметричной теории являются частными решениями для краевых задач несимметричной [2]. Метод получения решения в вышеприведенном виде подробно описан в [5], поэтому здесь приведем лишь итоговые соотношения.

Для удобства дальнейшего анализа перейдем к безразмерной форме записи решений. Для этого в качестве характерного размера выберем некоторый радиус R и воспользуемся новыми безразмерными величинами:

$$\begin{aligned} A &= R \sqrt{\frac{\alpha\mu}{(\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon)}}, \\ B &= \frac{\alpha + \mu}{\alpha}, \quad C = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для $U^{(0)}(\rho)$ решение известно [4]. Решение для $V^{(0)}(\rho)$ и $\omega^{(0)}(\rho)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 U^{(0)}(\rho) &= C_1^{(0)}\rho + \frac{C_2^{(0)}}{\rho}, \\
 V^{(0)}(\rho) &= C_3^{(0)}\rho + \frac{C_4^{(0)}}{\rho} - C_5^{(0)}\frac{I_1(2A\rho)}{2A^2} - \\
 &\quad - C_6^{(0)}\frac{K_1(2A\rho)}{2A^2}, \\
 \omega^{(0)}(\rho) &= C_3^{(0)} - C_5^{(0)}\frac{BI_0(2A\rho)}{2A} + \\
 &\quad + C_6^{(0)}\frac{BK_0(2A\rho)}{2A}.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Можно также выписать решение для первой гармоники:

$$\begin{aligned}
 U^{(1)}(\rho) &= C_1^{(1)} + \frac{C_2^{(1)}}{\rho^2} + C_3^{(1)}\rho^2 + C_4^{(1)}\ln\rho + \\
 &\quad + C_5^{(1)}\frac{I_1(2A\rho)}{\rho} + C_6^{(1)}\frac{K_1(2A\rho)}{\rho}, \\
 V^{(1)}(\rho) &= -C_1^{(1)} + \frac{C_2^{(1)}}{\rho^2} + C_3^{(1)}\frac{3\lambda + 5\mu}{\mu - \lambda}\rho^2 - \\
 &\quad - C_4^{(1)}\left\{\ln\rho + \frac{\lambda + \mu}{3\mu + \lambda}\right\} + \\
 &\quad + C_5^{(1)}\left\{\frac{I_1(2A\rho)}{\rho} - 2AI_0(2A\rho)\right\} + \\
 &\quad + C_6^{(1)}\left\{\frac{K_1(2A\rho)}{\rho} + 2AK_0(2A\rho)\right\}, \\
 \omega^{(1)}(\rho) &= C_3^{(1)}\frac{4\lambda + 8\mu}{\mu - \lambda}\rho - C_4^{(1)}\frac{\lambda + 2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} - \\
 &\quad - C_5^{(1)}2A^2BI_1(2A\rho) - C_6^{(1)}2A^2BK_1(2A\rho).
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Решение для старших гармоник будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 U^{(n)}(\rho) &= \frac{C_1^{(n)}}{\rho^{n+1}} + \frac{C_2^{(n)}}{\rho^{n-1}} + C_3^{(n)}\rho^{n-1} + \\
 &\quad + C_4^{(n)}\rho^{n+1} + \frac{C_5^{(n)}}{\rho}I_n(2A\rho) + \frac{C_6^{(n)}}{\rho}K_n(2A\rho), \\
 V^{(n)}(\rho) &= \frac{C_1^{(n)}}{\rho^{n+1}} + \frac{C_2^{(n)}}{\rho^{n-1}}\frac{\lambda(n-2) + \mu(n-4)}{\lambda n + \mu(n+2)} - \\
 &\quad - C_3^{(n)}\rho^{n-1} - C_4^{(n)}\frac{\lambda(n+2) + \mu(n+4)}{\lambda n + \mu(n-2)}\rho^{n+1} + \\
 &\quad + C_5^{(n)}\left(\frac{1}{\rho}I_n(2A\rho) - \frac{2A}{n}I_{n-1}(2A\rho)\right) + \\
 &\quad + C_6^{(n)}\left(\frac{1}{\rho}K_n(2A\rho) + \frac{2A}{n}K_{n-1}(2A\rho)\right),
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \omega^{(n)}(\rho) &= \frac{C_2^{(n)}}{\rho^n}\frac{\lambda(2n-2) + \mu(4n-4)}{\lambda n + \mu(n+2)} - \\
 &\quad - C_4^{(n)}\frac{\lambda(2n+2) + \mu(4n+4)}{\lambda n + \mu(n-2)}\rho^n - \\
 &\quad - C_5^{(n)}\frac{2A^2B}{n}I_n(2A\rho) - C_6^{(n)}\frac{2A^2B}{n}K_n(2A\rho).
 \end{aligned}$$

В выражениях (7)–(9) $I_n(\rho)$, $K_n(\rho)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Вид частных решений, стоящих при коэффициентах $C_1^{(i)} - C_4^{(i)}$, соответствует симметричной теории упругости, а при $C_5^{(i)}, C_6^{(i)}$ — несимметричной. Основная проблема состояла именно в нахождении вида последних двух частных решений для всех гармоник. Константы при частных решениях в соотношениях (7)–(9) определяются из краевых условий соответствующих задач.

Общее решение в перемещениях, записанное выше, является достаточно громоздким и не позволяет непосредственно сделать какие-либо выводы о поведении среды в рамках континуума Коссера. Поэтому далее необходимо проанализировать какие-либо частные решения конкретных краевых задач с целью поиска макровеличин, которые имели бы отличия от соответствующих значений классической теории упругости и могли бы быть экспериментально измерены.

Одной из возможных экспериментально-реализуемых схем является задача о деформировании кольца (цилиндра), жестко закрепленного по внешнему контуру $\rho = R_1$ (рис. 2, а). Деформирование осуществляется за счет жесткого смещения внутреннего контура $\rho = R_0$ на величину d . В этой задаче линейных масштабов два — радиус жесткой шайбы и радиус упругого внешнего кольца. Нами в качестве характерного размера был выбран радиус внешнего контура R_1 . Решение этой задачи можно получить, если в рядах (5) удерживать одно слагаемое при $n = 1$. Для этой задачи на рис. 2, б, в представлены распределения по безразмерной радиальной координате ρ безразмерных компонент тензора напряжений $\sigma_{\rho\varphi}$ и $\sigma_{\rho\rho}$. Данные величины позволяют определить осевую силу реакции внутреннего контура F_y , которая может быть измерена экспериментально. На основе данной осевой силы реакции можно ввести величину δ , характеризующую отличия от силы реакции F_y^* в классическом случае:

$$\begin{aligned}
 F_y &= \int_0^{2\pi} (\sigma_{\rho\varphi}(R_0, \varphi)\sin\varphi + \sigma_{\rho\rho}(R_0, \varphi)\cos\varphi)R_0d\varphi, \\
 \delta &= \left| \frac{F_y - F_y^*}{F_y^*} \right| \cdot 100\%.
 \end{aligned}$$

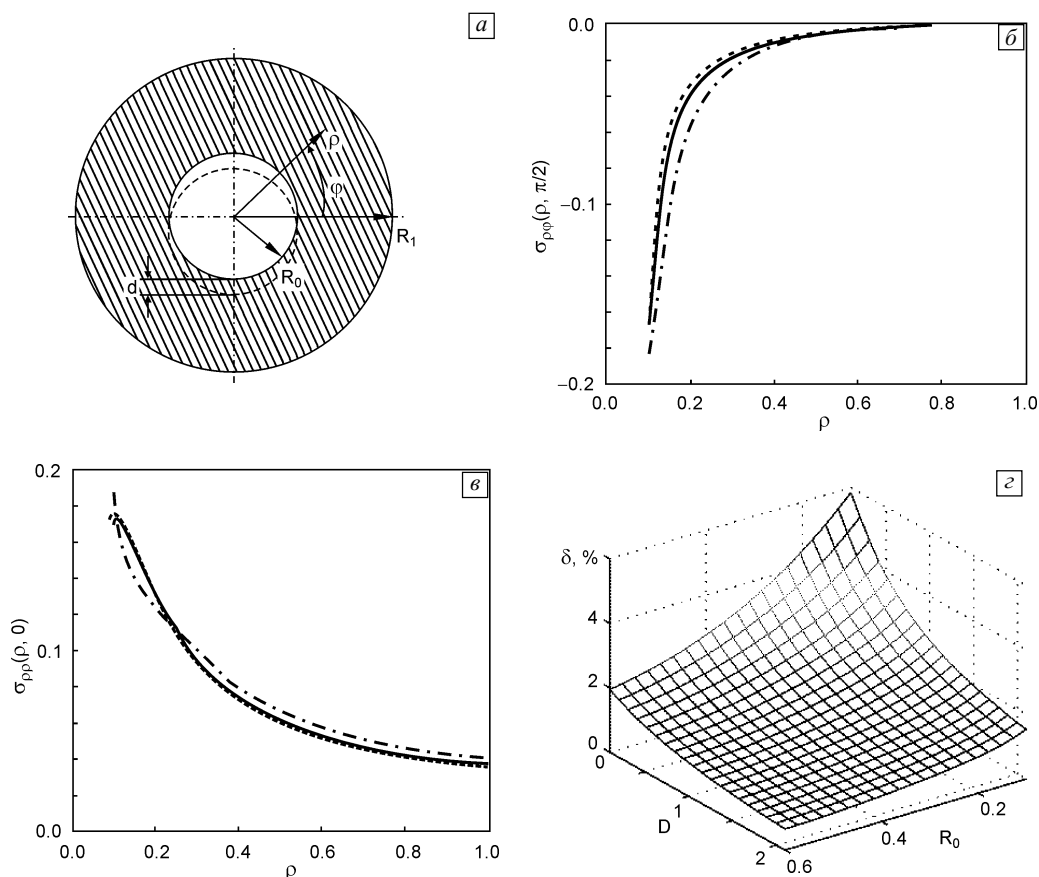


Рис. 2. Параметрический анализ решения задачи о деформировании кольца, $d=0.02$, $R_0 = 0.1$, $R_1 = 1$. Сплошные линии соответствуют решению для среды Коссера, штрихпунктирные — для псевдосреды Коссера, штриховые — для классической теории упругости

Зависимость данной величины как от внутреннего радиуса R_0 , так и от толщины сечения $D = R_1 - R_0$ приведена на рис. 2, з. Хорошо видно, что отличия от классического случая увеличиваются как по мере уменьшения радиуса R_0 (при фиксированном отношении радиусов), так и по мере уменьшения толщины сечения, так как оба этих фактора приводят к возрастанию влияния моментных свойств.

По аналогичному алгоритму были проанализированы две последующие задачи. Задача о вращении кольца показана на рис. 3. В этой задаче, как видно из представленных результатов, степень отклика значительно выше, чем в предыдущей задаче. Другими словами, она наиболее информативна для оценки моментных свойств в предполагаемом эксперименте, где возможным является измерение реактивного момента M — момента, необходимого для поворота шайбы на угол φ_0 . Как видно из рис. 3, з, эта величина возрастает по мере уменьшения как радиуса R_0 , так и толщины сечения шайбы и значительно превосходит подобную величину в предыдущей задаче:

$$M = \int_0^{2\pi} (\sigma_{\rho\varphi}(R_0, \varphi)R_0^2 + \mu_{\rho z}(R_0, \varphi)R_0) d\varphi,$$

$$\delta = \left| \frac{M - M^*}{M^*} \right| \cdot 100 \%$$

Впервые подробный анализ этих двух задач (в альтернативной форме записи решений без использования специальных функций Бесселя) был проделан авторами в [6].

Третьей задачей является задача Кирша об одностороннем растяжении пластины, ослабленной круговым отверстием. Эта задача наиболее привлекательна с точки зрения экспериментальной реализации, так как в ней края кругового отверстия свободны от внешних напряжений, а на бесконечности действует растягивающее усилие постоянной интенсивности в направлении горизонтальной оси (рис. 4, а). Решение этой задачи можно получить, если в рядах (5) удерживать слагаемые при $n = 0$ и $n = 2$. В этой задаче весь сценарий моментного отклика, безусловно, реализуется в окрестности отверстия, где появляются градиенты напряжений и деформаций.

Впервые, в рамках классической теории упругости, эта задача была решена Киршем, позднее, несколько иным путем, Мухелишвили [7]. Обобщение этой зада-

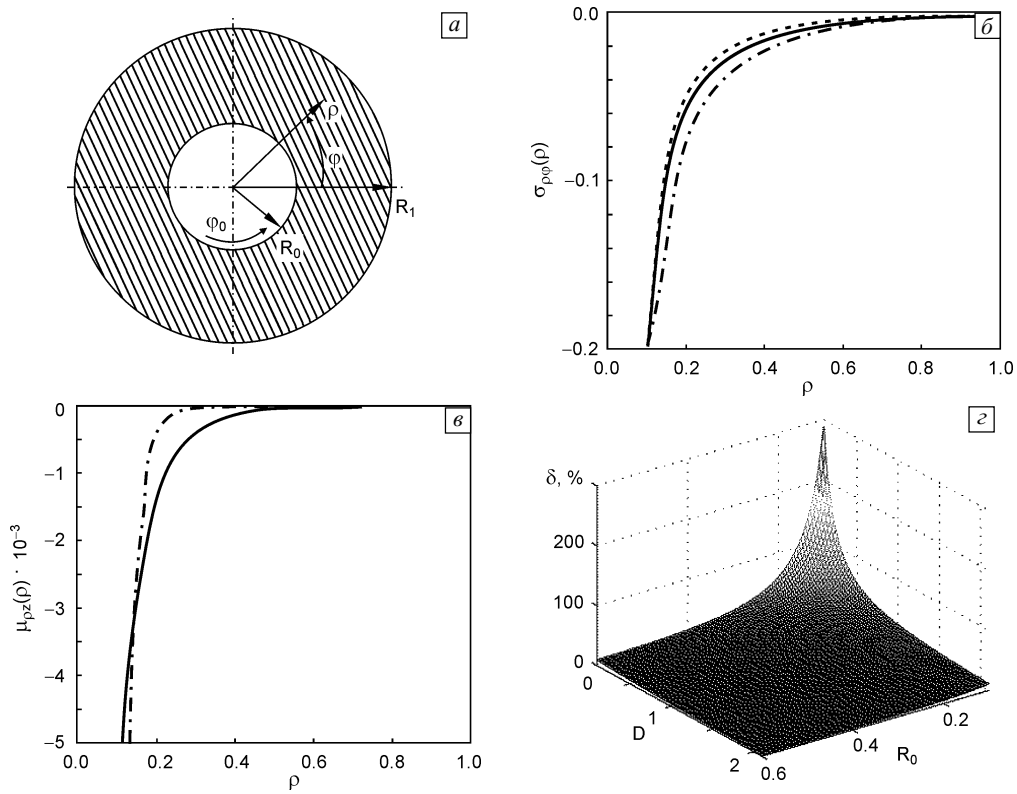


Рис. 3. Параметрический анализ решения задачи о вращении кольца $\varphi_0 = 0.1$, $R_0 = 0.1$, $R_1 = 1$. Сплошные линии соответствуют решению для среды Коссера, штрихпунктирные — для псевдосреды Коссера, штриховые — для классической теории упругости

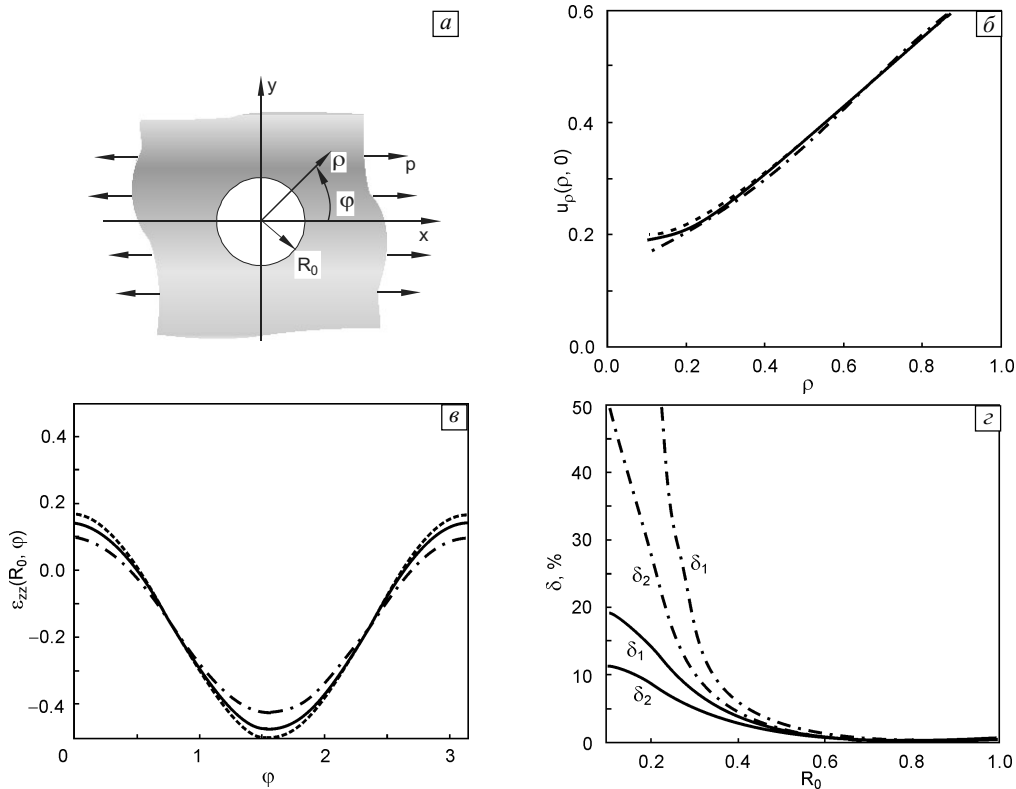


Рис. 4. Параметрический анализ решения задачи Киршша. $R_0 = 0.1$, $p = 2$. Сплошные линии соответствуют решению для среды Коссера, штрихпунктирные — для псевдосреды Коссера, штриховые — для классической теории упругости

чи на случай псевдосреды Коссера можно найти в работе [8]. Пальмовым [9] была найдена концентрация напряжений вблизи кругового отверстия в рамках несимметричной теории упругости. Следует отметить, что решение, приведенное в [9], не позволяет в полной мере проанализировать напряженно-деформированное состояние в окрестности кругового отверстия, в частности, характеризовать степень искажения отверстия при деформировании. Поэтому данная задача была подробно проанализирована авторами в [10, 11]. Некоторые результаты данного анализа приводятся ниже.

Для этой задачи можно определить два макропараметра: D_1 , определяющий степень искажения первоначально круглого отверстия, и D_2 , определяющий меру искажения профиля поверхности пластины по контуру отверстия (рис. 4, б, в):

$$D_1 = \left| \frac{u_\rho(R_0, 0)}{u_\rho(R_0, \pi/2)} \right|,$$

$$D_2 = \left| \varepsilon_{zz}(R_0, 0) - \varepsilon_{zz}(R_0, \pi/2) \right|,$$

$$\delta_n = \left| \frac{D_n - D_n^*}{D_n^*} \right| \cdot 100 \%,$$

где величина ε_{zz} может быть вычислена в рамках гипотезы о плосконапряженном состоянии:

$$\varepsilon_{zz}(\rho, \varphi) = \frac{\chi - 3}{\chi + 1} (\gamma_{\rho\rho}(\rho, \varphi) + \gamma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi)),$$

$$\chi = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}.$$

Параметр D_1 привлекателен тем, что в классической теории он не зависит от механических свойств материала и всегда равен 3. Как и следовало ожидать, на представленном графике (рис. 4, в) меры отклика на моментные свойства δ_1 и δ_2 возрастают по мере уменьшения линейного масштаба R_0 .

Таким образом, рассмотренный класс задач демонстрирует возможность определения макропараметров, которые зависят от моментных свойств и, что очень важно, могут быть экспериментально измерены. Степень отклика введенных макропараметров на момент-

ные свойства можно определить путем сопоставления его с соответствующим макропараметром, полученным в рамках классической теории упругости. Во всех рассмотренных задачах степень отклика зависела от какого-либо линейного масштаба и при этом увеличивалась с уменьшением этого масштаба.

3. Численные решения статических задач несимметричной теории упругости

С целью расширения круга решаемых задач авторами был разработан алгоритм метода конечных элементов для решения двумерных статических задач несимметричной теории упругости. Для конечно-элементной реализации используется следующее вариационное уравнение несимметричной теории упругости [2]:

$$\int_V (\tilde{\sigma} \cdot \delta \tilde{\gamma} + \tilde{\mu} \cdot \delta \tilde{\chi}) dV - \int_V (\mathbf{X} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{Y} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}) dV = \int_S (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}) dS,$$

где \mathbf{p} , \mathbf{m} — интенсивность внешних поверхностных сил и моментов.

В качестве конечного элемента используется треугольный элемент с квадратичной аппроксимацией компонент вектора перемещений и линейной аппроксимацией компонент вектора поворота. Численные эксперименты показали, что этот тип элемента является наиболее эффективным. При сопоставимых затратах памяти и объема вычислений он обеспечивает по сравнению с другими элементами наименьшую погрешность.

Разработанный алгоритм был использован для решения и анализа задач несимметричной теории упругости, которые решить аналитически не представляется возможным.

На основе разработанного конечно-элементного алгоритма получены численные решения ряда задач, в которых моментные эффекты проявляются более ярко, чем в задачах, для которых получены аналитические решения. Например, задача о растяжении пластины, ослабленной несколькими круговыми симметрично расположенными отверстиями (рис. 5, а). Радиусы всех отверстий равны.

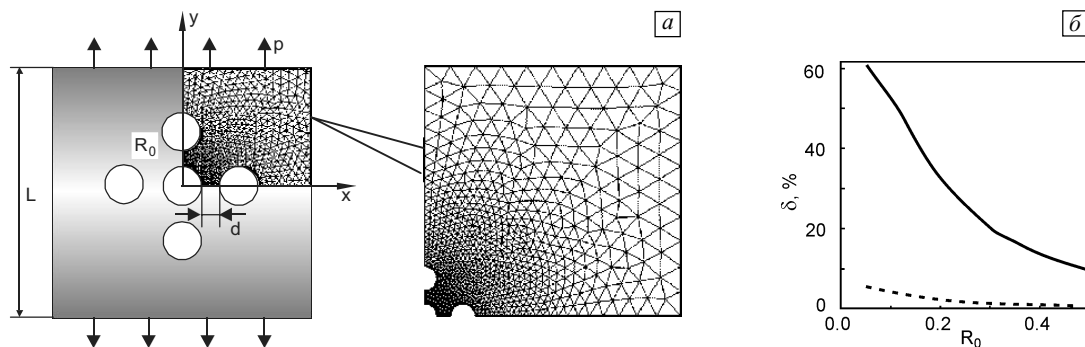


Рис. 5. Задача о растяжении пластины с пятью отверстиями, где $d = 0.25R_0$, $L = 20(3R_0 + d)$ (а); различие моментного и классического решений δ при изменении радиусов отверстий (б), сплошная линия соответствует решению в точке $(0; R_0)$, пунктирная — в точке $(0; R_0 + d)$

В качестве характеристики различия решений используется величина

$$\delta = \left| \frac{u_y - u_y^*}{u_y^*} \right| \cdot 100 \%,$$

где u_y — решение в рамках несимметричной теории упругости; u_y^* — решение в рамках симметричной теории упругости.

На рис. 5, б представлена зависимость δ от изменения радиусов отверстий. Из полученных результатов решения данной задачи следует, что:

1. Во всех случаях мера отклика моментных свойств материала δ немонотонно возрастает при уменьшении радиуса отверстия R_0 . Такая зависимость соответствует характеру этой зависимости и для традиционной задачи Кирша.

2. По мере сближения отверстий (уменьшения параметра d) величина меры δ возрастает, особенно в точках, наиболее близко расположенных к центральному отверстию (рис. 5, б).

3. Увеличение числа отверстий усилило меру отклика моментных свойств материала δ на выбранный макропараметр. При прочих равных условиях это усиление достигает нескольких раз.

4. Предыдущий вывод позволяет утверждать, что увеличение числа отверстий значительно повышает возможность зафиксировать отклик моментных свойств материала в физическом эксперименте.

Также решена задача об одноосном растяжении пластины с трещиной (рис. 6, а). В качестве макропараметра в данной задаче было принято перемещение u_y по направлению оси y (направление действия силы p) в середине одного из берегов трещины (рис. 6, б). В физическом эксперименте это перемещение может быть измерено с необходимой степенью точности. Расчеты показывают, что раскрытие берегов трещины, полученное в рамках несимметричной теории упругости, больше, чем в классическом упругом решении. На рис. 6, в приведена зависимость меры отклика δ от длины трещины d . Эта мера возрастает при уменьшении длины трещины.

Для всех статических задач, рассмотренных в этом и предыдущем разделах, значения материальных физических констант принимались следующими:

$$\lambda = 2.096 \text{ ГПа}, \mu = 1.033 \text{ ГПа}, \alpha = 114.8 \text{ МПа}, \\ \gamma = 4.1 \cdot 10^6 \text{ Н}, \epsilon = 1.312 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

4. Аналитические решения волновых задач несимметричной теории упругости

В сейсмических и геофизических исследованиях сегодня применяются (хотя и не очень широко) механические [12] или лазерные [13] сенсоры, позволяющие непосредственно измерять скорости поворотов в трех перпендикулярных направлениях. Это говорит о принципиальной возможности измерений, показывающих характер связи векторов перемещения и поворота. Та-

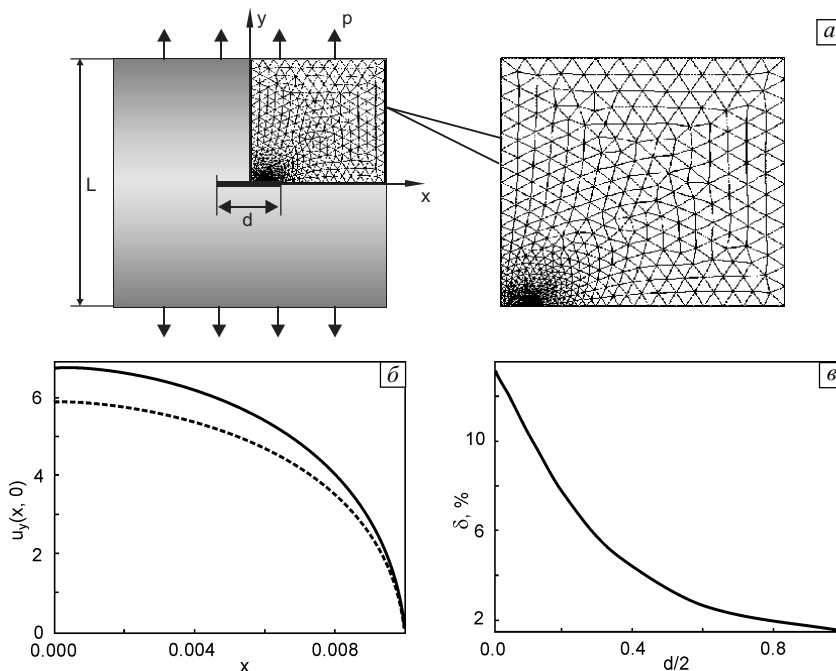


Рис. 6. Задача о растяжении пластины с трещиной, где $L = 20d$ (а); распределение перемещения u_y вдоль линии трещины (б), сплошная линия соответствует моментному решению, пунктирная — классическому; различие моментного и классического решений δ при изменении размера трещины d в точке $(0; 0)$ (в)

ким образом, волновые эксперименты, особенно в геологических средах, могут являться очень информативными с точки зрения идентификации моделей несимметричных сред. Однако необходимой теоретической базой для подобных экспериментов являются точные аналитические решения для различных типов плоских волн. При этом наиболее подходящим для сравнения с экспериментальными данными, полученными в результате сейсмических измерений, является двумерное немонахроматическое представление волновых решений (рис. 7). Подобное представление характерно тем, что волна, которая распространяется в направлении оси x с фазовой скоростью C_p , не зависит от поперечной координаты y (хотя и имеет поперечную компоненту колебаний u_y).

Более того, данная волна является ограниченным во времени и фурье-пространствах волновым пакетом произвольной формы. В силу искажения волнового пакета при его распространении это представление также удобно и для анализа возможных дисперсионных свойств волны и групповой скорости.

При таком представлении общее решение уравнений движения представимо в виде фурье-интегралов относительно всех компонент вектора перемещения \mathbf{u} и вектора поворота $\hat{\omega}$ (физический смысл имеют здесь только вещественные части соответствующих компонент):

$$u_n(x, z, k(f), t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_n(z) e^{i(k(f)x + ft)} \hat{S}_0(f) df, \quad (10)$$

$$\omega_n(x, z, k(f), t) = \int_{-\infty}^{\infty} W_n(z) e^{i(k(f)x + ft)} \hat{S}_0(f) df,$$

где $n = \{x, y, z\}$ — координатный индекс; i — мнимая единица; $k(f)$ — волновое число как функция круговой частоты f ; t — время; $U_n(z)$ и $W_n(z)$ — амплитудные функции, зависящие от «глубины» z .

Неизвестная функция волнового числа $k(f)$ будет определяться далее из соответствующего алгебраического дисперсионного уравнения, которое получается для каждого типа волны при учете геометрии задачи и граничных условий. Функция $\hat{S}_0(f)$ задает комплексный фурье-спектр сигнала-источника, который определяет форму волнового пакета и является начальным условием рассматриваемой динамической задачи.

Оправданным в данном случае является выполнение непрерывного фурье-преобразования уравнений движения (1). Это дает следующую систему относительно фурье-образов искомых компонент векторов перемещения и поворота (учитываем, что массовых сил и моментов нет):

$$(2\mu + \lambda) \text{grad div } \hat{\mathbf{u}} - (\mu + \alpha) \text{rot rot } \hat{\mathbf{u}} + 2\alpha \text{rot } \hat{\omega} + \rho f^2 \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad (11)$$

$$(2\gamma + \beta) \text{grad div } \hat{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \hat{\omega} + 2\alpha \text{rot } \hat{\mathbf{u}} - (4\alpha - jf^2) \hat{\omega} = 0.$$

Фурье-преобразование представления (10) дает:

$$\hat{\mathbf{u}} = \{U_x(z), U_y(z), U_z(z)\}^T e^{ikx} \hat{S}_0(f), \quad (12)$$

$$\hat{\omega} = \{W_x(z), W_y(z), W_z(z)\}^T e^{ikx} \hat{S}_0(f).$$

Подставляя (12) в (11), в силу линейности исходной системы экспоненциальный член и фурье-образ сигнала-источника сокращаются. Кроме этого, исходная система распадается на две независимые системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающие продольную волну относительно функций $U_x(z), U_z(z), W_y(z)$:

$$(\mu + \alpha)U_x''(z) + (\rho f^2 - k^2(2\mu + \lambda))U_x(z) + ik(\lambda + \mu - \alpha)U_z'(z) - 2\alpha W_y'(z) = 0,$$

$$(2\mu + \lambda)U_z''(z) + (\rho f^2 - k^2(\mu + \alpha))U_z(z) + ik(\lambda + \mu - \alpha)U_x'(z) + 2ik\alpha W_y(z) = 0, \quad (13)$$

$$(\gamma + \varepsilon)W_y''(z) + (jf^2 - k^2(\gamma + \varepsilon) - 4\alpha)W_y(z) + 2\alpha U_x'(z) - 2ik\alpha U_z(z) = 0$$

и поперечную волну относительно $U_y(z), W_x(z), W_z(z)$:

$$(\gamma + \varepsilon)W_x''(z) + (jf^2 - k^2(2\gamma + \beta) - 4\alpha)W_x(z) + ik(\beta + \gamma - \varepsilon)W_z'(z) - 2\alpha U_y'(z) = 0,$$

$$(2\gamma + \beta)W_z''(z) + (jf^2 - k^2(\gamma + \varepsilon) - 4\alpha)W_z(z) + ik(\beta + \gamma - \varepsilon)W_x'(z) + 2ik\alpha U_y(z) = 0, \quad (14)$$

$$(\mu + \alpha)U_y''(z) + (\rho f^2 - k^2(\mu + \alpha))U_y(z) + 2\alpha W_x'(z) - 2ik\alpha W_z(z) = 0.$$

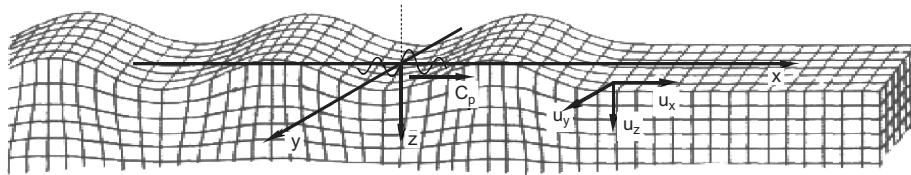


Рис. 7. Принципиальное представление волновых решений уравнений движения

Системы (13) и (14) допускают три различных типа решений. Конкретизируя виды граничных условий, можно получить решения для затухающей с глубиной волны Рэлея [14, 15] в полупространстве, не затухающей с глубиной волны Лэмба в пластине [16], а также решения для плоских волн с не зависящей от глубины (постоянной по глубине) амплитудой. Первые два типа относятся к классу плоских поверхностных волн, в то время как третий тип соответствует плоским объемным волнам. Далее приведем подробный анализ этих волновых типов, начиная с объемных волн.

Решения для объемных продольных волн получаются из условий:

$$U_x(z) = U_x, \quad U_y(z) = 0, \quad U_z(z) = 0, \\ W_x(z) = W_x, \quad W_y(z) = 0, \quad W_z(z) = 0.$$

После подстановки данных условий в уравнения (13) и (14) получаем два независимых дисперсионных уравнения, первое из которых соответствует продольной волне перемещений, а второе — продольной волне поворотов:

$$(\rho f^2 - k^2(\lambda + 2\mu))U_x(z) = 0, \\ (j f^2 - k^2(\beta + 2\gamma) - 4\alpha)W_x(z) = 0.$$

Оправданным в данном случае является переход к безразмерной форме решений с использованием безразмерных параметров C_1 и C_5 , что дает две дисперсионные кривые:

$$k_1(f) = \frac{f}{C_1}, \quad k_2(f) = \sqrt{\frac{f^2}{C_5^2} - k_0^2}, \quad (15) \\ C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_5^2 = \frac{\beta + 2\gamma}{j X_0^2 f_0^2}, \quad k_0 = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta + 2\gamma}},$$

где X_0 — некоторый характерный размер; f_0 — некоторая характерная частота. Таким образом, дополнительно к скорости продольной волны C_1 необходимо ввести параметр C_5 , связанный со скоростью продольной волны поворотов. Кроме этого, продольная волна поворотов имеет запрещенную частотную зону, характе-

ризуемую величиной k_0 — предельным волновым числом. Из этого решения также видно, что волна поворотов обладает дисперсией, но при достаточно больших частотах ее дисперсионная кривая имеет асимптотическое поведение.

По аналогии можно получить решение для плоской поперечной волны:

$$k_3(f) = \sqrt{A_p(f)}, \quad k_4(f) = \sqrt{A_m(f)}, \quad (16) \\ A_{p,m} = \frac{C_3^2 + C_4^2}{2C_3^2 C_4^2} f^2 - 2A^2 \pm \left(\frac{(C_3^2 - C_4^2)^2}{4C_3^4 C_4^4} f^4 - \frac{2A^2(C_2^2 C_3^2 - 2C_3^2 C_4^2 + C_2^2 C_4^2)}{C_2^2 C_3^2 C_4^2} f^2 + 2A^4 \right)^{1/2}, \\ C_2^2 = \frac{\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_3^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_4^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{j X_0^2 f_0^2}.$$

С использованием (15), (16) приведем численный пример зависимости фазовых скоростей объемных волн от частоты, используя следующие гипотетические значения материальных параметров: $\lambda = 28$ ГПа, $\mu = 4$ ГПа, $\rho = 10^5$ кг/м³, $\alpha = 2$ ГПа, $\beta = 10^8$ Н, $\gamma = 1.936 \cdot 10^8$ Н, $\varepsilon = 3.0464 \cdot 10^9$ Н, $j = 10^4$ кг/м.

На рис. 8, а приведены фазовые скорости $C_{p,1}(f) = f/k_1(f)$ и $C_{p,2}(f) = f/k_2(f)$. Помимо известной дисперсионной кривой $C_{p,1}(f)$ продольной волны перемещений в среде возникает независимая волна поворотов с фазовой скоростью $C_{p,2}(f)$, обладающая дисперсией и имеющая нижнюю частоту $\omega_0 = 2\sqrt{\alpha/j}$. Видно, что скорость C_5 является предельной для волны поворотов.

Решение (16) имеет следующую интерпретацию. Во-первых, в случае среды Коссера у поперечной волны имеется две волновые моды с волновыми числами $k_3(f)$ и $k_4(f)$ (в силу изотропии среды горизонтально и вертикально поляризованные поперечные волны неразличимы, поэтому по две волновые моды имеют каждая из них). Это отличает решения (16) от классического случая, когда имеется лишь одна волновая мода. Во-вторых,

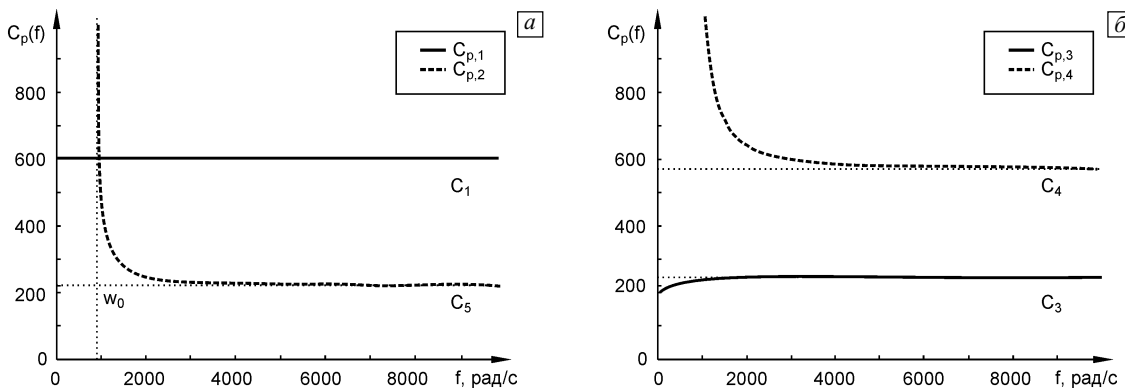


Рис. 8. Численный пример, иллюстрирующий поведение объемных продольных (а) и поперечных (б) волн в среде Коссера

обе волновые моды обладают дисперсией, что видно из рис. 8, б. Одна из мод обладает нижней критической частотой, но в данном случае эта частота определяется из уравнений (16) и не равна критической частоте ω_0 продольной волны. Также можно сделать вывод о том, что безразмерные скоростные параметры C_3 и C_4 , используемые при записи решений (16), являются асимптотическими скоростями при $f \rightarrow \infty$ объемных поперечных волновых мод.

Основным отличительным признаком поверхностных волн является то, что амплитуда волны изменяется, например затухает, с глубиной. Поэтому в отличие от предыдущего случая в решении для поверхностных волн присутствуют все шесть компонент перемещений, связанных с функциями затухания $U_x(z)$, $U_y(z)$, $U_z(z)$, $W_x(z)$, $W_y(z)$, $W_z(z)$. Однако, как и в предыдущем случае, решение получается из независимых систем (13), (14). Поэтому оно состоит из двух частей, одна из которых описывает продольно-поперечную эллиптическую волну, а вторая соответствует горизонтально-поперечной волне, затухающей с глубиной.

Используя метод, подробно описанный в [14, 15] применительно к (13), (14), можем получить общее безразмерное решение уравнений движения (1). Необходимо только отметить, что в отличие от поверхностной волны, решение для которой рассмотрено в [14, 15], в общем случае необходимо оставить все частные решения, а не только затухающие с глубиной. Таким образом, общее решение в перемещениях имеет вид [16]:

– для продольно-поперечной эллиптической волны:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ D_1 i k e^{-v_1 z} + D_2 v_2 e^{-v_2 z} + \right. \\
 &+ D_3 v_3 e^{-v_3 z} + D_4 i k e^{v_1 z} - D_5 v_2 e^{v_2 z} - \\
 &\left. - D_6 v_3 e^{v_3 z} \right\} e^{i(kx+ft)} \hat{S}_0(f) df, \\
 u_z(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -D_1 v_1 e^{-v_1 z} + D_2 i k e^{-v_2 z} + \right. \\
 &+ D_3 i k e^{-v_3 z} + D_4 v_1 e^{v_1 z} + D_5 i k e^{v_2 z} + \\
 &\left. + D_6 i k e^{v_3 z} \right\} e^{i(kx+ft)} \hat{S}_0(f) df,
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_y(x, z, t) &= \frac{B}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ D_{2,5} \left(A_m - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{\mp v_2 z} + \right. \\
 &+ D_{3,6} \left(A_p - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{\mp v_3 z} \left. \right\} e^{i(kx+ft)} \hat{S}_0(f) df,
 \end{aligned}$$

– для горизонтально-поперечной волны:

$$\begin{aligned}
 u_y(x, z, t) &= \\
 &= \frac{F}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_{2,5} \left(A_m - \frac{f^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{\mp \xi_2 z} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ E_{3,6} \left(A_p - \frac{f^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{\mp \xi_3 z} \left. \right\} \times \\
 &\times e^{i(kx+ft)} \hat{S}_0(f) df,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_x(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_1 i k e^{-\xi_1 z} + E_2 \xi_2 e^{-\xi_2 z} + \right. \\
 &+ E_3 \xi_3 e^{-\xi_3 z} + E_4 i k e^{\xi_1 z} - E_5 \xi_2 e^{\xi_2 z} - \\
 &\left. - E_6 \xi_3 e^{\xi_3 z} \right\} e^{i(kx+ft)} \hat{S}_0(f) df,
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_z(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -E_1 \xi_1 e^{-\xi_1 z} + E_2 i k e^{-\xi_2 z} + \right. \\
 &+ E_3 i k e^{-\xi_3 z} + E_4 \xi_1 e^{\xi_1 z} + E_5 i k e^{\xi_2 z} + \\
 &\left. + E_6 i k e^{\xi_3 z} \right\} e^{i(kx+ft)} \hat{S}_0(f) df,
 \end{aligned}$$

где величины A , B , C определяются соотношением (6), константы E_j , D_j должны быть определены из граничных условий для каждого типа волны отдельно, а экспоненциальные показатели амплитудных функций определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \sqrt{k^2 - \frac{f^2}{C_1^2}}, \quad \xi_1 = \sqrt{k^2 - \frac{f^2}{C_5^2} + \frac{2C_4^2}{FC_5^2}}, \\
 v_{2,3} &= \xi_{2,3} = \sqrt{k^2 - A_{m,p}}, \quad F = \frac{B-1}{A^2 B}.
 \end{aligned}$$

Приведенные выше соотношения (17), (18) описывают в частном случае хорошо изученные решения для поверхностных волн в упругом полупространстве. Данные решения являются затухающими с глубиной, то есть константы при экспонентах с положительными показателями равны нулю: $E_{4,5,6} = D_{4,5,6} = 0$. Граничные условия определяют отсутствие сил и моментов на поверхности полупространства ($z=0$) и в безразмерном случае имеют вид: $\sigma_{zx} = 0$, $\sigma_{zy} = 0$, $\sigma_{zz} = 0$, $\mu_{zx} = 0$, $\mu_{zy} = 0$, $\mu_{zz} = 0$.

Используя данные краевые условия последовательно для (17) и (18), получаем два дисперсионных уравнения. Первое дисперсионное уравнение

$$\det(M_r(v_1, v_2, v_3)) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 M_r(p_1, p_2, p_3) &= \\
 &= \begin{bmatrix} 2k^2 - f^2/C_2^2 & -2ikp_2 & -2ikp_3 \\ 2ikp_1 & 2k^2 - f^2/C_2^2 & 2k^2 - f^2/C_2^2 \\ 0 & p_2(A_m - f^2/C_3^2) & p_3(A_p - f^2/C_3^2) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

определяет поверхностную волну с компонентами u_x , u_z , ω_y . Этой волне соответствует классическая волна Рэлея.

Второе дисперсионное уравнение

$$\det(M_t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) = 0,$$

$$M_1(p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix} \frac{2ik}{1-B} & \left(2 + \frac{A_m C_4^2 - f^2}{2A^2 C_4^2}\right) p_2 & \left(2 + \frac{A_p C_4^2 - f^2}{2A^2 C_4^2}\right) p_3 \\ ik(1+C)p_1 & k^2 C + p_2^2 & k^2 C + p_3^2 \\ \left(\frac{C_5^2}{C_4^2} - C - 1\right) k^2 - p_1^2 \frac{C_5^2}{C_4^2} & 2ikp_2(1+C) & 2ikp_3(1+C) \end{bmatrix},$$

определяет поверхностную волну с компонентами u_y, ω_x, ω_z . Эту волну можно было бы назвать поперечной, так как компонента u_y перпендикулярна направлению распространения волны. Геометрически эта волна подобна волне Лява, однако в классической теории упругости существование волны Лява как поверхностной волны определяется наличием слоя на полупространстве, при стремлении толщины слоя к нулю волна Лява переходит в объемную. Таким образом, в среде Коссера была обнаружена качественно новая волновая мода, аналогов которой в классической теории упругости нет.

Численный анализ полученных дисперсионных уравнений позволил установить графические зависимости волновых чисел и нормированных скоростей от частоты (рис. 9, 10). Сплошные линии обозначают решения для среды Коссера, точечные относятся к решениям, полученным в рамках классического упругого континуума, а пунктирные соответствуют скорости C_2 упругой среды. Как и для объемных волн, данные решения говорят о наличии дисперсии, что является значимым отличием от классической теории упругости.

На рис. 11 приведены зависимости решений (17), (18) от глубины, отнесенной к длине волны. Сплошная линия соответствует новой горизонтально-поперечной волновой моде, пунктирная — волне Рэлея в среде Коссера, точечная — волне Рэлея в классической упругой среде. Данная зависимость иллюстрирует, что исследуемые волны являются типично поверхностными, вся энергия которых сосредоточена в тонком приповерхностном слое, причем толщина слоя локализации зависит от частоты.

Полученное решение позволяет также проследить эволюцию исходного сигнала в виде волнового пакета. В качестве сигнала-источника $\hat{S}_0(f)$ был использован вейвлет, физический образ которого представлен на

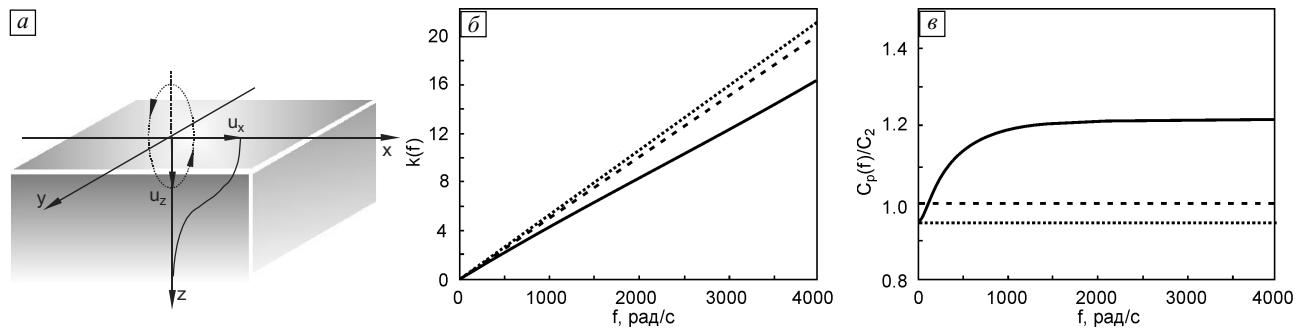


Рис. 9. Численный пример, иллюстрирующий дисперсионные свойства волны Рэлея в среде Коссера

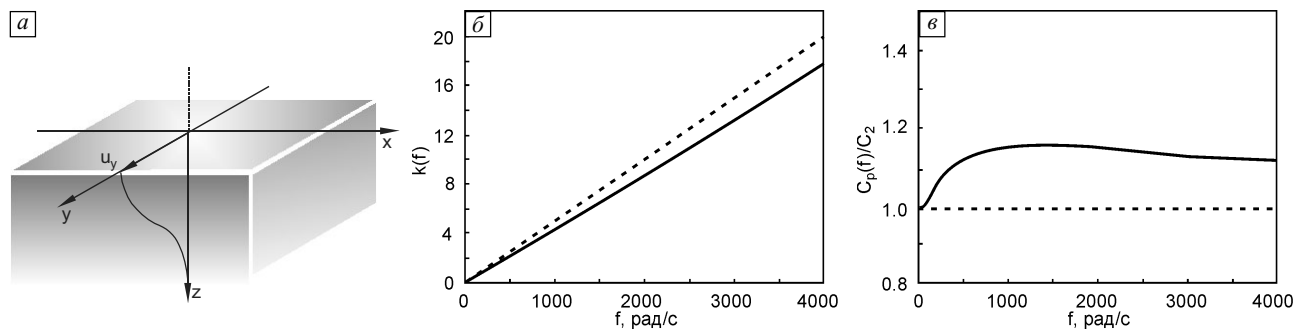


Рис. 10. Численный пример, иллюстрирующий дисперсионные свойства горизонтально-поперечной волны в среде Коссера

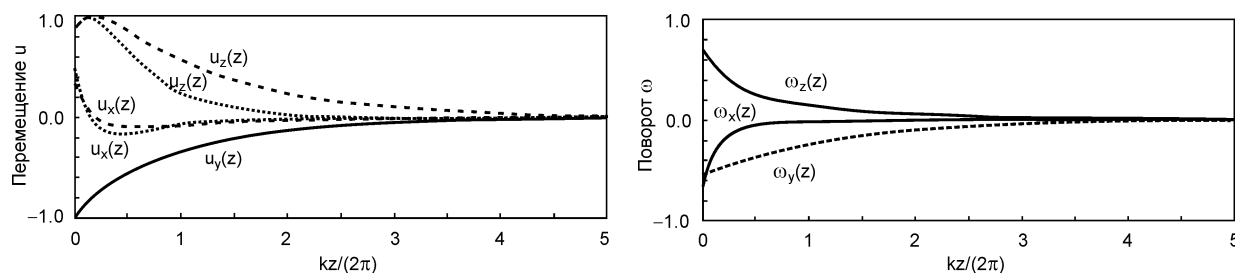


Рис. 11. Численный пример, иллюстрирующий затухание с глубиной поверхностных волн в среде Коссера

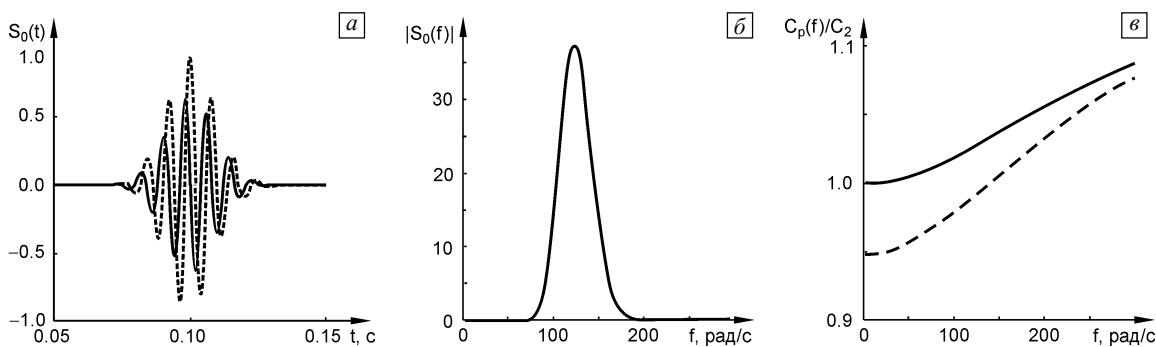


Рис. 12. Сигнал-источник и дисперсионные параметры среды, использованные для генерации сейсмограмм перемещений

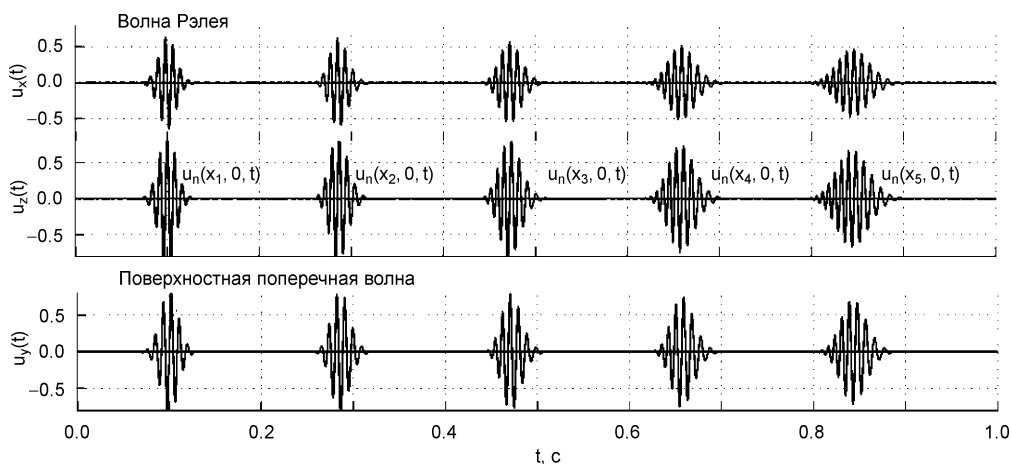


Рис. 13. Трехкомпонентная сейсмограмма перемещений

рис. 12. На серии графиков, приведенных на рис. 13, представлен вид изменения исходного сигнала по мере его продвижения по поверхности упругого полупространства для трех компонент перемещения (17), (18).

5. Заключение

В данной работе получены следующие новые результаты.

Предложены подходы к построению точных аналитических решений некоторых одномерных и двумерных статических и волновых краевых задач в рамках несимметричной теории упругости для линейной среды Коссера.

На основе метода конечных элементов реализован алгоритм решения задач несимметричной теории упругости о статическом деформировании.

Получены аналитические и численные решения ряда статических и динамических задач.

На основе анализа поведения полученных решений введены экспериментально измеряемые макропараметры, откликающиеся на моментное поведение среды.

Качественный и численный анализ полученных решений позволяет сделать ряд выводов о поведении упругой среды в рамках модели Коссера.

Безразмерная форма записи аналитических решений позволяет наглядно установить принципиальное разли-

чие безразмерных моментных и классических решений, а именно: безразмерное моментное решение зависит от характерного геометрического размера, а классическое — нет. Одним из интересных направлений дальнейших исследований может быть определение этих зависимостей для волновых задач.

Все введенные статические макропараметры возрастают по мере уменьшения характерного геометрического размера. В задаче о кручении кольца (рис. 3) наблюдается неограниченное возрастание этой степени различий. В остальных задачах степень различия при фиксированных материальных константах, видимо, имеет конечный предел при неограниченном уменьшении характерного геометрического размера.

Наибольшая степень возрастания имеет место в задаче о кручении. Однако с точки зрения простоты экспериментальной схемы и надежности измерений более привлекательными являются задачи о растяжении пластины с отверстиями (рис. 4, 5), так как в них не требуется задавать граничные условия для вектора поворота.

Задачи о распространении объемных волн (рис. 8) являются достаточно интересными с точки зрения интерпретации новых параметров, возникающих при записи волновых решений в безразмерном виде. Однако с точки зрения экспериментальной реализации данные задачи не представляются нам перспективными.

В отличие от объемных волн поверхностные волны для упругого полупространства несут в себе значительный экспериментальный потенциал. Во-первых, дисперсионный анализ экспериментальных трехкомпонентных сейсмограмм (полученных по аналогии с сейсмограммой, приведенной на рис. 13) позволяет получить экспериментальные дисперсионные кривые и сравнить их с теоретическими кривыми (рис. 9, 10). Во-вторых, с использованием ротационных сенсоров [12, 13] можно было бы проследить связь компонент перемещений и поворотов в соответствии с соотношениями (17), (18). В-третьих, наличие в среде Коссера поверхностной поперечной волны также может быть объектом экспериментальных исследований с применением внедренных на различные глубины сенсоров.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 07-01-96029-р-Урал-а, 07-01-97613-р-офи), а

также при поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF) в рамках грантов молодым ученым Y2-P-09-04, Y4-P-09-04.

Литература

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. – Paris: A. Hermann et fils, 1909. – 226 p.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
3. *Grekova E.F., Herman G.C.* Wave Propagation in Rocks Modeled as Reduced Cosserat Continuum // Proc. of 66th EAGE (European Association of Geoscientists and Engineers) Conf. – Paris, 2004. – P. 098.
4. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
5. *Кулеш М.А., Шардаков И.Н.* Построение и анализ некоторых точных аналитических решений двумерных упругих задач в рамках континуума Коссера // Математическое моделирование систем и процессов. – Пермь: ПГТУ, 2001. – № 9. – С. 187–201.
6. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. – М.: Наука, 2002. – № 5. – С. 69–82.
7. *Мухомелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
8. *Mindlin R.D.* Influence of couple-stress on stress concentrations // Experimental Mechanics. – 1963. – V. 3. – No. 1. – P. 1–7.
9. *Пальмов В.А.* Плоская задача теории несимметричной упругости // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28. – Вып. 6. – С. 1117–1120.
10. *Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N.* Parametric analysis of analytical solutions to one- and two-dimensional problems in couple-stress theory of elasticity // Z. Angew. Math. Mech. – 2003. – V. 83. – No. 4. – P. 238–248.
11. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 145–154.
12. *Nighor R.L.* Six-degree-of-freedom ground-motion measurement // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1994. – V. 84. – No. 5. – P. 1665–1669.
13. *Igel H., Schreiber U., Flaws A., Schuberth B., Velikoseltsev A., Cochard A.* Rotational motions induced by the M8.1 Tokachi-oki earthquake, September 25, 2003 // Geophysical Research Letters. – 2005. – V. 32. – P. L08309.
14. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера // Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – Т. 46. – № 4. – С. 116–124.
15. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Акустический журнал. – 2006. – Т. 52. – № 2. – С. 227–235.
16. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение аналитического решения волны Лэмба в рамках континуума Коссера // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48. – № 1. – С. 143–150.

Поступила в редакцию
21.06.2007 г.