

УДК 550.344.5

**МГНОВЕННЫЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА  
ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ  
ВЕЙВЛЕТОВ<sup>1</sup>**© 2008 М.А. Кулеш<sup>2</sup>

В данной работе рассматривается задача определения поляризационных параметров сейсмических сигналов, представленных на трехкомпонентной сейсмограмме. Предложен новый метод определения спектрально-временных поляризационных параметров в случае объемно-эллиптической поляризации сигнала. Использование в предложенном методе непрерывного вейвлет-преобразования как одного из возможных подходов к спектрально-временному анализу позволяет обрабатывать и интерпретировать сейсмические волновые поля, для которых характерно большое количество волн различного типа с различным частотным составом, параметрами поляризации и протяженными зонами их интерференции. Предложенный метод может использоваться для построения эффективных алгоритмов фильтрации, что продемонстрировано на примере фильтрации экспериментальной сейсмограммы.

**Введение**

Конечной целью обработки сейсмограмм является измерение характеристик полезного сигнала в ситуации, когда там представлена достаточно сложная суперпозиция самых различных типов волновых движений. Например, в задачах пассивного сейсмического мониторинга имеется потребность обнаружения вступлений Р- и S-волн [1]. В связи с тем, что волны Рэлея являются диспергирующими в гетерогенной среде, их поляризационные свойства являются частотно-зависимыми [2], что может быть использовано для дисперсионного анализа. В активных сейсмических экспериментах, напротив, волны Рэлея рассматриваются в качестве шума и должны быть подавлены с целью выделения именно объемных волн [3]. Другим приложением поляризационного анализа является идентификация эффекта расщепления S-волн, которое несет в себе информацию об анизотропных свойствах среды [4].

В дополнение к широко распространенным в волновой динамике методам идентификации волн по их частотному составу, скоростям или направлениям подхода волновых фронтов, также получили развитие методы селекции волн по характеристикам их поляризации, т.е. по чисто геометрическим характеристикам колебаний [5, 6]. Например, применение поляризационных методов анализа позволило

<sup>1</sup>Представлена доктором технических наук, академиком РАН В.П.Матвеевко.

<sup>2</sup>Кулеш Михаил Александрович (kma@icmm.ru), Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Россия, г.Пермь, ул.Акад. Королева, 1.

значительно повысить разрешающую способность методов скважинной и наземной сейсмоки в сложнопостроенных средах [7–9].

К сожалению, используемые сегодня методы поляризационного анализа [10–13] имеют значительные ограничения, так как они не различают волны, пришедшие в один и тот же момент, но имеющие разные частоты. В связи с этим хорошие результаты дает использование спектрально-временного представления, замечательного, в частности, тем, что оно позволяет интерпретировать и изучать частотно-временные образы сигналов. Спектрально-временной подход получил мощное развитие в работах А.Л. Левшина и А.В. Ландера [6] и по праву стал одним из важнейших методов численного анализа сигналов. Сегодня разработано и активно используется большое количество различных методов спектрально-временного анализа. Среди них можно выделить оконное Фурье-преобразование, преобразование Габора, распределение Вагнера–Вилла [14], S-преобразование [15], дискретное вейвлет-преобразование [16,17], непрерывное вейвлет-преобразование [18,19]. Во всех этих методах общим является то, что результат анализа некоего сигнала должен содержать в себе не только перечисление его характерных частот, но и сведения об определенных временных координатах, в которых эти частоты проявляют себя.

В [6] можно найти, пожалуй, первую попытку интегрирования поляризационного и спектрально-временного анализа. С тех пор было опубликовано большое количество работ, посвященных подобной интеграции. В [20] используется метод сингулярного разложения матрицы (SVD) совместно с мультивейвлетным анализом на базе дискретных ортогональных вейвлетов, а в [21] — на базе непрерывного вейвлет-преобразования. В [22] развивается метод, аналогичный методу Морозова [11], но с использованием S-преобразования. Комбинация комплексного ковариационного метода и непрерывного вейвлет-преобразования с использованием комплексных ортогональных вейвлетов Майера приведена в [23]. И, наконец, оценки некоторых поляризационных параметров с использованием дискретного вейвлет-пакетного разложения предложены в [1].

В данной работе предложен новый метод определения спектрально-временных поляризационных параметров в случае объемно-эллиптической поляризации сигнала на основе непрерывного вейвлет-преобразования. На практике предпочтение зачастую отдается дискретным вейвлетам [16,17]. Это связано с тем, что обычно используемые базисы на основе непрерывных вейвлетов не являются, строго говоря, ортонормированными. С дискретными вейвлетами таких проблем не возникает. В силу этого дискретные вейвлеты приводят обычно к более точному преобразованию и представлению сигнала, в особенности, к его обратному восстановлению. Однако предложенный в работе метод фактически базируется на свойстве избыточности непрерывного вейвлет-преобразования, связанного с непрерывным изменением временного и частотного параметров. Предложенный в работе метод может использоваться для построения эффективных алгоритмов фильтрации, что продемонстрировано на примере фильтрации экспериментальной сейсмограммы.

## 1. Основные соотношения вейвлет-анализа сигналов

В отличие от Фурье-преобразования, вейвлет-преобразование обеспечивает двухмерную развертку исследуемого сигнала, при этом частота и время рассматриваются как независимые переменные. В результате появляется возможность ана-

лизовать свойства сигнала одновременно в физическом (время) и масштабном (частота) пространствах.

Непрерывное вейвлет-преобразование определяется следующим образом [18,19]. Пусть  $s(t)$  — вещественный или комплексный сигнал, удовлетворяющий условию конечности энергии:

$$s(t) \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < \infty.$$

Пусть далее  $g(\cdot), h(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$  — вещественные или комплексные базисные функции специального вида, называемые *вейвлетами*, звездочка сверху обозначает комплексное сопряжение, а  $\mathcal{W}_g s(t, a)$  — комплексный вейвлет-образ, зависящий от двух факторов: безразмерного масштабного  $a \in \mathbb{R}$  и размерного временного  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда вейвлет-преобразование сигнала  $s(t)$  является его сверткой со множеством сдвинутых и скалированных вейвлетов и имеет вид:

$$\mathcal{W}_g s(t, a) = \langle T_t D_a g, s \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} g^* \left( \frac{\tau - t}{a} \right) s(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \hat{g}^*(a\omega) \hat{s}(\omega) d\omega.$$

Операция  $T_t : g(\tau) \mapsto g(\tau - t)$  обозначает временной сдвиг материнского вейвлета, а  $D_a : g(\tau) \mapsto g(\tau/a)/a$  — его масштабирование. Необходимо отметить, что вышеприведенное определение операции  $D_a$  не является единственным. Например, часто используется также масштабирование вида  $D_a : g(\tau) \mapsto g(\tau/a)/\sqrt{a}$  с соответствующей модификацией формулы для вейвлет-преобразования. Однако в этом случае амплитуда вейвлет-коэффициентов становится пропорциональной не только амплитуде самого сигнала на том или ином масштабе, но также и масштабному параметру.

Обратное вейвлет-преобразование определяется следующим образом:

$$s(t) = \mathcal{M}_h \mathcal{W}_g s(t, a) = \frac{1}{C_{g,h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} h \left( \frac{t - \tau}{a} \right) \mathcal{W}_g s(\tau, a) d\tau da.$$

В нашем случае в качестве масштаба удобно выбрать физическую частоту, измеряемую в Гц, которая связана с безразмерным фактором:  $a = f_0/f$ , где  $f_0$  — характерная (средняя) частота вейвлета. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_g s(t, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f}{f_0} g^* \left( \frac{(\tau - t)f}{f_0} \right) s(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \varphi t} \hat{g}^* \left( \frac{\varphi f_0}{f} \right) \hat{s}(\varphi) d\varphi, \\ s(t) = \mathcal{M}_h \mathcal{W}_g s(t, f) &= \frac{1}{C_{g,h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f_0} h \left( \frac{t - \tau}{f_0} \right) \mathcal{W}_g s(\tau, f) d\tau df. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В приведенных выше соотношениях  $C_{g,h}$  — амплитудный коэффициент, аналогичный коэффициенту  $1/2\pi$  обратного преобразования Фурье:

$$C_{g,h} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega} \left( \hat{g}^*(\omega) \hat{h}(\omega) + \hat{g}^*(-\omega) \hat{h}(-\omega) \right) d\omega.$$

Достаточно подробные обзоры вейвлетобразующих функций приведены в [18,19], мы же ограничимся здесь только теми, которые будем использовать в дальнейшем (рис. 1):

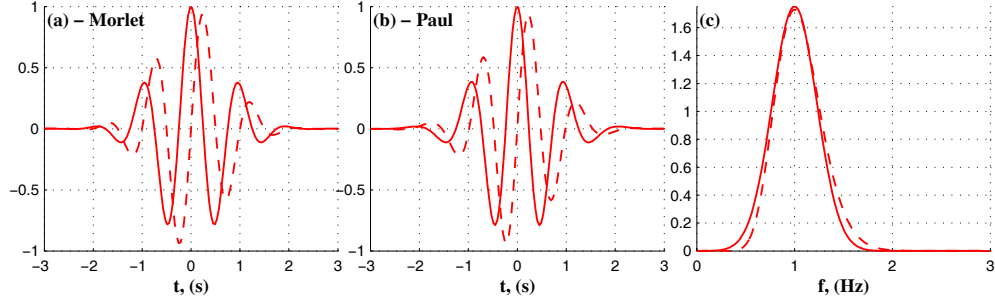


Рис. 1. Характерный вид вейвлетов Морле (а) и Пауля (b) во временном (а), (b) и частотном (с) пространствах

- 1) Комплексный вейвлет Морле, хорошо локализованный во временном и частотном пространствах, приведен на рис. 1, а. Сплошной линией изображена действительная часть вейвлета, а пунктирной — мнимая. Фурье-спектр вейвлета Морле является действительным и изображен на рис. 1, с сплошной линией. Значения самого вейвлета и его Фурье-спектра определяются соотношениями:

$$g(t) = e^{2\pi i t} e^{-t^2/(2\sigma^2)}, \quad \hat{g}(\omega) = \sigma \sqrt{2\pi} e^{-(\omega-2\pi)^2 \sigma^2/2}.$$

Ширина вейвлета в частотном пространстве определяется коэффициентом  $\sigma$ , а средняя частота этого вейвлета  $f_0$  равна единице.

- 2) Комплексный вейвлет Пауля приведен на рис. 1, b (сплошная линия — действительная часть, пунктирная — мнимая):

$$g(t) = \left(1 - \frac{2\pi i t}{p-1}\right)^{-p}, \quad \hat{g}(\omega) = \frac{(p-1)^p}{(p-1)!} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{p-1} e^{-(p-1)\omega/2\pi}.$$

Средняя частота этого вейвлета в Фурье-пространстве также равна единице (рис. 1, с, пунктирная линия), а ширина определяется параметром  $p$ . В отличие от вейвлета Морле, Фурье-спектр вейвлета Пауля является несимметричным относительно средней частоты.

Вейвлеты Морле и Пауля являются прогрессивными, то есть спектр Фурье этих вейвлетов равен нулю для отрицательных частот. Это свойство позволяет представить вейвлет-спектр в виде суперпозиции прогрессивного  $\mathcal{W}_g^+ s(t, f)$  и регрессивного  $\mathcal{W}_g^- s(t, f)$  спектров,

$$\mathcal{W}_g s(t, f) = \mathcal{W}_g^+ s(t, f) + \mathcal{W}_g^- s(t, f),$$

где

$$\mathcal{W}_g^+ s(t, f) = \begin{cases} \mathcal{W}_g s(t, f), & f \geq 0, \\ 0, & f < 0, \end{cases} \quad \mathcal{W}_g^- s(t, f) = \begin{cases} 0, & f \geq 0, \\ \mathcal{W}_g s(t, f), & f < 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Для вещественных сигналов модули прогрессивного и регрессивного вейвлет-спектров являются симметричными относительно нулевой частоты. Однако, как уже отмечалось, сигнал  $s(t)$  может быть и комплексным. В этом случае прогрессивная и регрессивная составляющие вейвлет-спектра будут различаться не только по фазе, но и по модулю.

## 2. Адаптивный ковариационный анализ трехкомпонентного сигнала

Рассматривая сигнал  $\vec{s}(t) = \{s_x(t), s_y(t), s_z(t)\}^T$ , соответствующий трехкомпонентной записи, где  $s_x(t)$ ,  $s_y(t)$  и  $s_z(t)$  являются радиальной, трансверсальной и вертикальной компонентами, как все три, так и любая комбинация двух ортогональных компонент могут быть выбраны для поляризационного анализа. В каждый момент времени такой сигнал наилучшим образом (в смысле наименьших квадратов) аппроксимируется прямой (линейно-поляризованные колебания), эллипсом (эллиптически-поляризованные колебания), сферой или трехосным эллипсоидом (объемно-поляризованные колебания). Линейно-поляризованные колебания являются частным случаем эллиптически-поляризованных, которые, в свою очередь, являются подмножеством объемно-поляризованных колебаний. Для описания объемно-поляризованного сигнала могут использоваться следующие параметры:

- 1) большой поляризационный вектор  $\vec{R} \in \mathbb{R}^3$  и большая полуось  $R = \|\vec{R}\|$ ,
- 2) средний поляризационный вектор  $\vec{r}_s \in \mathbb{R}^3$  и средняя полуось  $r_s = \|\vec{r}_s\| \in [0, R]$ ,
- 3) малый поляризационный вектор  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  и малая полуось  $r = \|\vec{r}\| \in [0, r_s]$ ,

а также ряд специализированных параметров:

- 1) эксцентриситет эллипса  $\rho = r_s/R$ ,  $\rho \in [0, 1]$ ,
- 2) эксцентриситет эллипсоида  $\rho_1 = r/r_s$ ,  $\rho_1 \in [0, 1]$ ,
- 3) угол падения  $\beta \in (-\pi/2, \pi/2]$  между большой полуосью и вертикальной осью  $z$ ,
- 4) угол наклона  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2]$  между большой полуосью и горизонтальной осью  $x$ ,
- 5) азимут  $\gamma \in (-\pi, \pi]$ , который является углом между горизонтальной осью  $x$  и проекцией большой полуоси на горизонтальную плоскость.

К сожалению, математически точного априорного определения мгновенных поляризационных атрибутов трехкомпонентного сигнала не существует, поэтому любая попытка так или иначе определить поляризационные свойства всегда будет базироваться на тех или иных допущениях. В работе [11] предложен метод, в котором трехмерные движения частиц среды моделируются как плоские эллиптические движения. Однако в более общем случае подобные движения можно также моделировать трехмерной кривой, опоясывающей трехмерный эллипсоид с тремя поляризационными векторами  $\vec{R} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  и  $\vec{r}_s \in \mathbb{R}^3$ . Ковариационный метод, описанный в [6, 12, 13, 24, 25], базируется именно на такой модели сигнала.

В основе ковариационного метода лежит анализ собственных чисел и собственных векторов ковариационной матрицы  $[\mathbf{M}(\xi)]$ , вычисляемой следующим образом:

$$\mathbf{M}(\xi) = \begin{bmatrix} M_{xx}(\xi) & M_{xy}(\xi) & M_{xz}(\xi) \\ M_{xy}(\xi) & M_{yy}(\xi) & M_{yz}(\xi) \\ M_{xz}(\xi) & M_{yz}(\xi) & M_{zz}(\xi) \end{bmatrix},$$

где

$$M_{jm}(\xi) = \frac{1}{T} \int_{\xi-T/2}^{\xi+T/2} (s_j(\tau) - \mu_j(\xi))(s_m(\tau) - \mu_m(\xi))d\tau, \quad j, m = (x, y, z).$$

Данная матрица вычисляется для временного окна  $T$ , где величина  $\xi$  — это центр окна. Величина  $\mu_j(\xi)$  характеризует среднее арифметическое компоненты  $s_j$  во временном окне  $T$ .

Три собственных значения  $\lambda_1(\xi) \geq \lambda_2(\xi) \geq \lambda_3(\xi)$  ковариационной матрицы  $[\mathbf{M}(\xi)]$  и три собственных вектора  $\vec{v}_j(\xi)$  полностью характеризуют величину и направление осей мгновенного эллипсоида, который наилучшим образом аппроксимирует движения частиц в интервале  $T$ . Это позволяет вычислить три вектора поляризации:

- большой полуоси  $\vec{R}(\xi) = \sqrt{\lambda_1(\xi)}\vec{v}_1(\xi)/\|\vec{v}_1(\xi)\|$ ,
- средней полуоси  $\vec{r}_s(\xi) = \sqrt{\lambda_2(\xi)}\vec{v}_2(\xi)/\|\vec{v}_2(\xi)\|$ ,
- малой полуоси  $\vec{r}(\xi) = \sqrt{\lambda_3(\xi)}\vec{v}_3(\xi)/\|\vec{v}_3(\xi)\|$ .

Проблемной точкой ковариационного метода является выбор окна  $T$ . В ситуации, когда в момент времени  $\xi$  сигнал представлен суперпозицией различных волн с разной частотой, однозначных критериев выбора этого окна не существует. Естественным решением этой проблемы является использование спектрально-временного представления [6]. Однако при этом появляется проблема автоматической адаптации временного окна  $T$  в соответствии с частотным масштабом. В данной работе предложен адаптивный ковариационный метод, позволяющий эффективно решить эту проблему [26].

Будем рассматривать аналитический сигнал  $\vec{z}(t)$ , вычисленный покомпонентно:  $\vec{z}(t) = \vec{s}(t) + i\mathcal{H}\vec{s}(t)$ , где операция  $\mathcal{H}$  означает преобразование Гильберта:

$$\mathcal{H}\delta(f) = \begin{cases} -i\delta(f), & f \geq 0, \\ i\delta(f), & f < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Тогда каждая компонента исходного сигнала  $s_j(t)$  может быть аппроксимирована следующим образом:

$$\begin{aligned} s_j(t + \tau) &= s_j^+(t + \tau) + s_j^-(t + \tau) = (z_j(t + \tau) + z_j^*(t + \tau))/2 \simeq \\ &\simeq (z_j(t)e^{i\Omega_j(t)\tau} + z_j^*(t)e^{-i\Omega_j(t)\tau})/2 = \\ &= |z_j(t)| \cos(\Omega_j(t)\tau + \arg z_j(t)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\Omega_j(t) = \partial \arg z_j(t) / \partial t$  является мгновенной частотой аналитического сигнала.

Используя аппроксимацию (2.2), можно получить два результата. Во-первых, интегралы в выражении для элементов ковариационной матрицы могут быть вычислены аналитически:

$$\begin{aligned} M_{jm}(t) &= |z_j(t)||z_m(t)| \left\{ \text{sinc}\left(\frac{\Omega_j(t) - \Omega_m(t)}{2} \Delta t_{jm}(t)\right) \cos(A_{jm}^-(t)) + \right. \\ &\quad \left. + \text{sinc}\left(\frac{\Omega_j(t) + \Omega_m(t)}{2} \Delta t_{jm}(t)\right) \cos(A_{jm}^+(t)) \right\} - \mu_{jm}\mu_{mj}, \\ A_{jm}^\pm(t) &= \arg z_j(t) \pm \arg z_m(t), \\ \mu_{jm} &= \Re(z_j(t))\text{sinc}(\Delta t_{jm}(t)\Omega_j(t)/2), \quad j, m = x, y, z, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ .

Во-вторых, несложно заметить, что для идеальноэллиптического сигнала, когда  $\Omega_x(t) = \Omega_y(t) = \Omega_z(t) = \Omega(t)$ , аппроксимация (2.2) является гармонической с периодом  $2\pi/\Omega(t)$ . Отсюда несложно показать, что при выборе окна  $\Delta t_{jm}(t) = 2\pi n/\Omega(t)$  мы получим значения полуосей эллипса точно. В общем случае мгновенные частоты всех компонент сигнала различаются, но при этом мы можем выбирать в

качестве базовой мгновенной частоты среднее значение. Это позволяет определить адаптивное окно  $\Delta t_{jm}(t)$  следующим образом:

$$\Delta t_{jm}(t) = \frac{2\pi n}{\Omega_{av}^{xyz}(t)} = \frac{6\pi n}{\Omega_x(t) + \Omega_y(t) + \Omega_z(t)} \quad (2.4)$$

или

$$\Delta t_{jm}(t) = \frac{2\pi n}{\Omega_{av}^{jm}(t)} = \frac{4\pi n}{\Omega_j(t) + \Omega_m(t)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

В выражениях (2.4)–(2.5) присутствует целочисленный параметр  $n$ , означающий, сколько периодов будут браться в аппроксимации (2.2) для вычисления элементов ковариационной матрицы. На рис. 2 показано, что происходит при изменении этого параметра. На рис. 2, *a* изображены три компоненты  $s_x(t)$ ,  $s_y(t)$ ,  $s_z(t)$  некоторого сигнала (сплошная линия) и аппроксимация (2.2) этих компонент (пунктирная линия). Мгновенные частоты каждой компоненты исходного сигнала различаются. На рис. 2, *b–d* показана аппроксимирующая кривая для трех разных адаптивных окон, вычисленных при помощи соотношения (2.4) для трех значений параметра  $n$ .

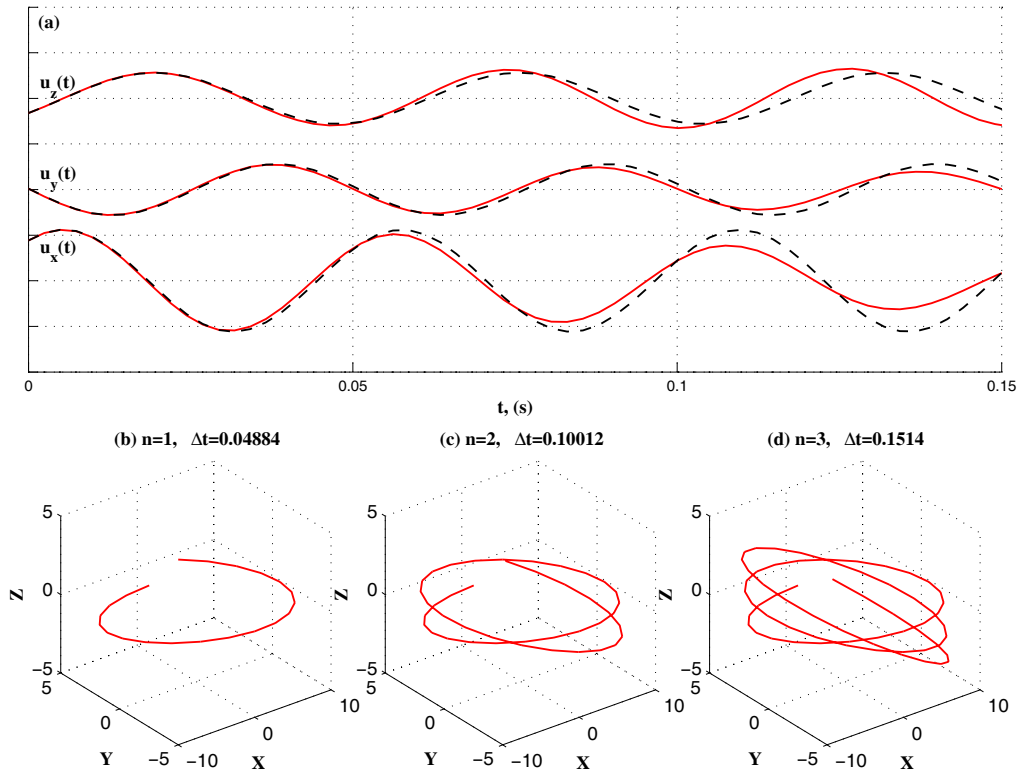


Рис. 2. Иллюстрация влияния параметра  $n$  в выражении (2.4) на точность аппроксимации адаптивного ковариационного метода

Можно заметить, что все эти кривые имеют соответствующее число практически полных периодов. При увеличении параметра  $n$  профиль кривых становится более объемным, повышается чувствительность метода с точки зрения определе-

ния малой оси поляризационного эллипсоида. В то же время при этом увеличивается отличие между исходным сигналом и аппроксимирующей функцией, то есть понижается точность определения остальных поляризационных осей.

Предложенный метод имеет два частных случая. Во-первых, рассмотрим двухкомпонентный сигнал  $\vec{s}(t) = \{s_x(t), s_y(t)\}^T$ , у которого мгновенные частоты обеих компонент равны:  $\Omega_x(t) = \Omega_y(t) = \Omega(t)$ . В этом случае ковариационная матрица имеет вид:

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} |z_x(t)|^2 & |z_x(t)||z_y(t)| \cos\left(\arg \frac{z_y(t)}{z_x(t)}\right) \\ |z_x(t)||z_y(t)| \cos\left(\arg \frac{z_y(t)}{z_x(t)}\right) & |z_y(t)|^2 \end{bmatrix}.$$

Несложно найти собственные значения этой матрицы:

$$\lambda_{1,2}(t) = \frac{1}{2} \left( |z_x(t)|^2 + |z_y(t)|^2 \pm \sqrt{(|z_x(t)|^2 - |z_y(t)|^2)^2 + (2|z_x(t)||z_y(t)| \cos(\Delta\phi(t)))^2} \right),$$

где  $\Delta\phi(t) = \arg(z_x^*(t)z_y(t))$ . Эти два значения в точности соответствуют поляризационным полуосям двухкомпонентного сигнала, получаемым в методе комплексного следа [10].

Во-вторых, рассмотрим трехкомпонентный сигнал также в предположении равенства мгновенных частот всех компонент. В этом случае элементы ковариационной матрицы определяются выражением:

$$M_{jm}(t) = |z_j(t)||z_m(t)| \cos(\arg z_j(t) - \arg z_m(t)) = \Re(z_j(t)z_m^*(t)).$$

Задавая аналитически тестовый гармонический сигнал с полуосями  $R$  и  $r$ , собственные значения этой матрицы также несложно отыскать аналитически:

$$\lambda_1(t) = R^2, \quad \lambda_2(t) = r^2, \quad \lambda_3(t) = 0.$$

Таким образом, предположение равенства мгновенных частот приводит к эллиптически-поляризованному сигналу в трехмерном пространстве, и в этом случае результат, полученный новым адаптивным ковариационным методом, в точности совпадает с результатом метода [11].

Предложенный адаптивный ковариационный метод обладает рядом преимуществ:

- 1) Во-первых, решена проблема выбора временного окна вычисления элементов ковариационной матрицы.
- 2) Во-вторых, элементы ковариационной матрицы можно вычислять при помощи аналитической формулы, не содержащей суммы или интегралов. Это положительно сказывается на производительности метода.
- 3) В-третьих, метод является обобщением известных и хорошо зарекомендовавших себя метода комплексного следа [10] и метода Морозова и Смитсона [11].
- 4) И, наконец, использование адаптивного временного окна позволяет обобщить данный метод на случай его использования для вычисления поляризационных параметров в частотно-временном пространстве, что будет подробно рассмотрено далее.

### 3. Частотно-временной адаптивный ковариационный метод

Можно обобщить описанный выше метод (2.3) на случай частотно-временного представления. В данном случае такое обобщение допустимо благодаря возможности выбора окна интегрирования адаптивным образом, что позволяет автоматически находить оптимальное окно для каждой частоты вейвлет-спектра. Численные тесты показали, что более предпочтительным является использование соотношения (2.5), так как оно дает более сглаженную картину поляризационных свойств:

$$\Delta t_{jm}(t, f) = \frac{4\pi n}{\Omega_j(t, f) + \Omega_m(t, f)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

$$\Omega_j(t, f) = \partial \arg \mathcal{W}_g^+ s_j(t, f) / \partial t.$$

Сравнивая свойство (1.2) вейвлет-преобразования с соотношениями (2.1), несложно заметить, что прогрессивный вейвлет-спектр, вычисленный при помощи прогрессивного вейвлета, соответствует вейвлет-спектру аналитического сигнала. Это свойство позволяет совершенно естественным образом записать аналог аппроксимации (2.2) для непрерывного вейвлет-спектра. Для вычисления элементов ковариационной матрицы используются только вещественные части прогрессивных вейвлет-коэффициентов, при этом, как и ранее, используем разложение вейвлет-коэффициентов в ряд Тейлора по времени в окрестности точки  $(t, f)$ :

$$\Re(\mathcal{W}_g^+ s_j(t + \tau, f)) \simeq |\mathcal{W}_g^+ s_j(t, f)| \cos(\Omega_j(t, f)\tau + \arg \mathcal{W}_g^+ s_j(t, f)).$$

Используя данное разложение, соотношения для вычисления элементов ковариационной матрицы по аналогии с (2.3) примут вид [27–29]:

$$M_{jm}(t, f) = |\mathcal{W}_g^+ s_j(t, f)| |\mathcal{W}_g^+ s_m(t, f)| \times$$

$$\times \left\{ \operatorname{sinc} \left( \frac{\Omega_j(t, f) - \Omega_m(t, f)}{2} \Delta t_{jm}(t, f) \right) \cos(A_{jm}^-(t, f)) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sinc} \left( \frac{\Omega_j(t, f) + \Omega_m(t, f)}{2} \Delta t_{jm}(t, f) \right) \cos(A_{jm}^+(t, f)) \right\} -$$

$$-\mu_{jm}(t, f) \mu_{mj}(t, f), \quad (3.2)$$

$$A_{jm}^\pm(t, f) = \arg \mathcal{W}_g^+ s_j(t, f) \pm \arg \mathcal{W}_g^+ s_m(t, f), \quad j, m = x, y, z,$$

$$\mu_{jm}(t, f) = \Re(\mathcal{W}_g^+ s_j(t, f)) \operatorname{sinc}(\Delta t_{jm}(t, f) \Omega_j(t, f) / 2),$$

где  $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$ .

Три собственных значения  $\lambda_1(t, f) \geq \lambda_2(t, f) \geq \lambda_3(t, f)$  ковариационной матрицы  $[\mathbf{M}(t, f)]$ , а также три собственных вектора  $\vec{v}_j(t, f)$  полностью характеризуют величину и направления осей мгновенного эллипсоида в момент времени  $t$  на частоте  $f$ , который аппроксимирует движения частиц в интервале  $\Delta t_{jm}(t, f)$ . Это позволяет вычислить три мгновенных вектора поляризации:

- большой полуоси  $\vec{R}(t, f) = \sqrt{\lambda_1(t, f)} \vec{v}_1(t, f) / \|\vec{v}_1(t, f)\|$ ,
- средней полуоси  $\vec{r}_s(t, f) = \sqrt{\lambda_2(t, f)} \vec{v}_2(t, f) / \|\vec{v}_2(t, f)\|$ ,
- малой полуоси  $\vec{r}(t, f) = \sqrt{\lambda_3(t, f)} \vec{v}_3(t, f) / \|\vec{v}_3(t, f)\|$ .

Предложенный метод (3.2) обладает большим потенциалом по фильтрации сигналов с использованием тех или иных поляризационных параметров, вычисляемых с использованием мгновенных векторов поляризации. В основе такой фильтрации лежат два свойства. Во-первых, определяющим является возможность использовать обратное вейвлет-преобразование после манипуляций с коэффициентами вейвлет-спектра, чего нет, например, у оконного Фурье-преобразования. Во-вторых, предложенные поляризационные методы позволяют определить большое количество различных параметров, которые можно использовать для идентификации тех или иных типов волн в частотно-временной плоскости. Поэтому, объединяя эти два свойства, можно определить поляризационный фильтр  $\mathcal{E}_{\vec{\mathcal{P}}}$  следующим образом:

$$s^f(t) = M_h \mathcal{E}_{\vec{\mathcal{P}}} \mathcal{W}_g s(t, f),$$

$$\mathcal{E}_{\vec{\mathcal{P}}}(t, f) = \begin{cases} \mathcal{W}_g s(t, f), & \text{если } \mathcal{P}_m \in P_m, \quad m \in [1, N], \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $N$  и  $\vec{\mathcal{P}}$  — количество и множество задействованных поляризационных параметров,  $\mathcal{P}_m$  — формальное обозначение одного какого-либо параметра, а  $P_m$  — множество допустимых значений данного параметра, соответствующее физическим свойствам волны, которую требуется отфильтровать.

#### 4. Фильтрация сейсмограммы регионального землетрясения

С помощью адаптивного ковариационного метода (3.2) выполнена фильтрация трехкомпонентной сейсмограммы (рис. 3), записанной во время регионального землетрясения [27]. Это землетрясение (время 13:02 13.03.1989, широта 50,7198 N, долгота 9,9112 E,  $h = 0,7$  км,  $M_L = 5,6$  [30]) было спровоцировано разрушением солевой шахты в Тюрингене, Германия на удалении 148 км и в направлении (с обратным азимутом)  $\gamma_0 = 128,8^\circ$  относительно сейсмической станции GRA1, входящей в состав сети GRF в северной Баварии.

Необходимо отметить, что сейсмограмма не является предварительно повернутой. Поэтому восточная и северная компоненты не совпадают с радиальной и трансверсальной компонентами распространяющихся волн, то есть при анализе угловых поляризационных параметров там, где это необходимо, нужно учитывать обратный азимут  $\gamma_0$ .

Рассматриваемая сейсмограмма начинается с Р-волны примерно на 165 с. Примерно на 20 с. позже появляются поперечные волны в горизонтальной плоскости. Так как источником явилось разрушение шахты, амплитуды SH-волн не являются значительными. В интервале 180–240 с. также наблюдается рэлеевская волна с вертикальной компонентой  $s_z(t)$ . Для нее на рис. 3 можно заметить дисперсию на низких частотах 0,15 Гц для первичных волн и на высоких 0,6 Гц для вторичных, что согласуется со скоростным анализом рассматриваемого события, выполненного в [31].

Для поляризационного анализа использовался метод (3.2) с параметром временного окна  $n = 3$ . Как результат применения адаптивного ковариационного метода, на рис. 4, *b* показан частотно-временной спектр коэффициента эллиптичности  $\rho_s(t, f)$  с учетом знака:

$$\rho_s = \text{sign}([\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2] \cdot \vec{v}_3) \rho.$$

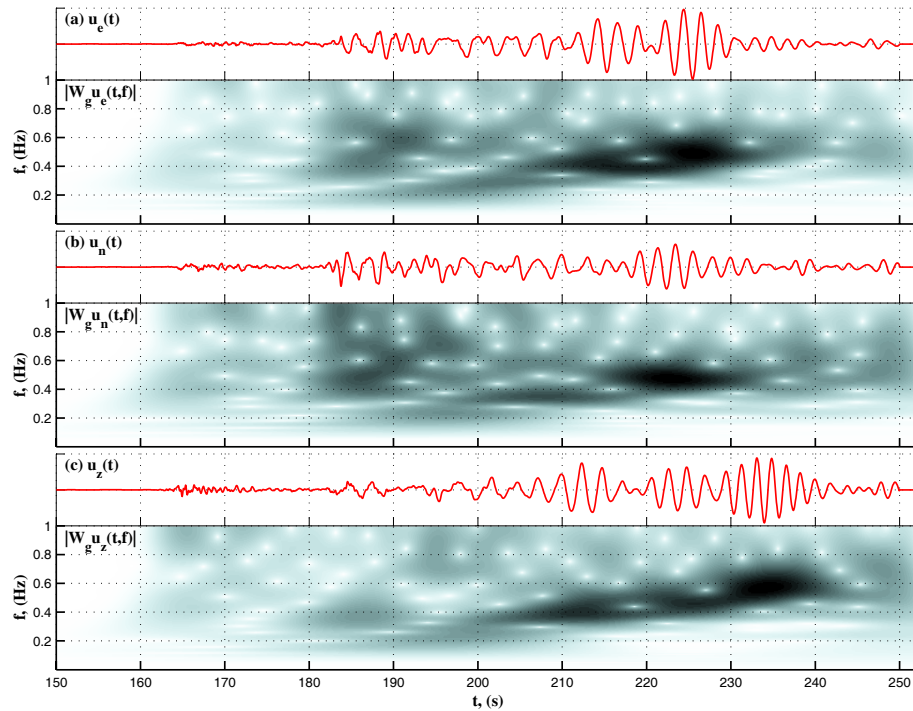


Рис. 3. Трехкомпонентная сейсмограмма регионального землетрясения, содержащая восточную  $s_e(t)$ , северную  $s_n(t)$  и вертикальную  $s_z(t)$  компоненты, а также вейвлет-спектр всех компонент. Временная ось отсчитывается от момента времени 13:00 13.03.1989

Волновые пакеты в данных частотно-временных областях имеют регрессивный характер колебаний и поэтому могут быть однозначно идентифицированы как фундаментальная мода рэлеевской волны. Применяя обратное вейвлет-преобразование к спектру, отфильтрованному предварительно при помощи отрицательного коэффициента эллиптичности при условии  $\rho_s(t, f) < -0.15$ , можно получить сейсмограмму, где остаются только волны Рэля. Такая сейсмограмма показана на рис. 4, *c*, где низкочастотная компонента рэлеевской фундаментальной моды с компонентами  $Z - N$  четко различима в интервале 190–210 с.

Интересным является также применение объемного направленного фильтра с использованием азимута  $\gamma(t, f)$ . Были выделены волновые пакеты с поляризацией, параллельной направлению обратного азимута, что характерно для продольных волн:  $(\gamma(t, f) - \gamma_0) \in [-20^\circ, 20^\circ]$ ; они приведены на рис. ??, с пунктирными линиями. Кроме этого, там же сплошными линиями показаны волновые моды с доминирующим направлением поляризации, перпендикулярным обратному азимуту:  $(\gamma(t, f) - \gamma_0) \in [70^\circ, 90^\circ] \cup [-70^\circ, -90^\circ]$ . В качестве примера таких волн можно наблюдать SH волну Лява в интервале 200–210 с.

## Заключение

В работе предложен новый метод определения спектрально-временных поляризационных параметров трехкомпонентных сигналов. Использование в предложенном методе вейвлет-преобразования как одного из возможных подходов к спек-

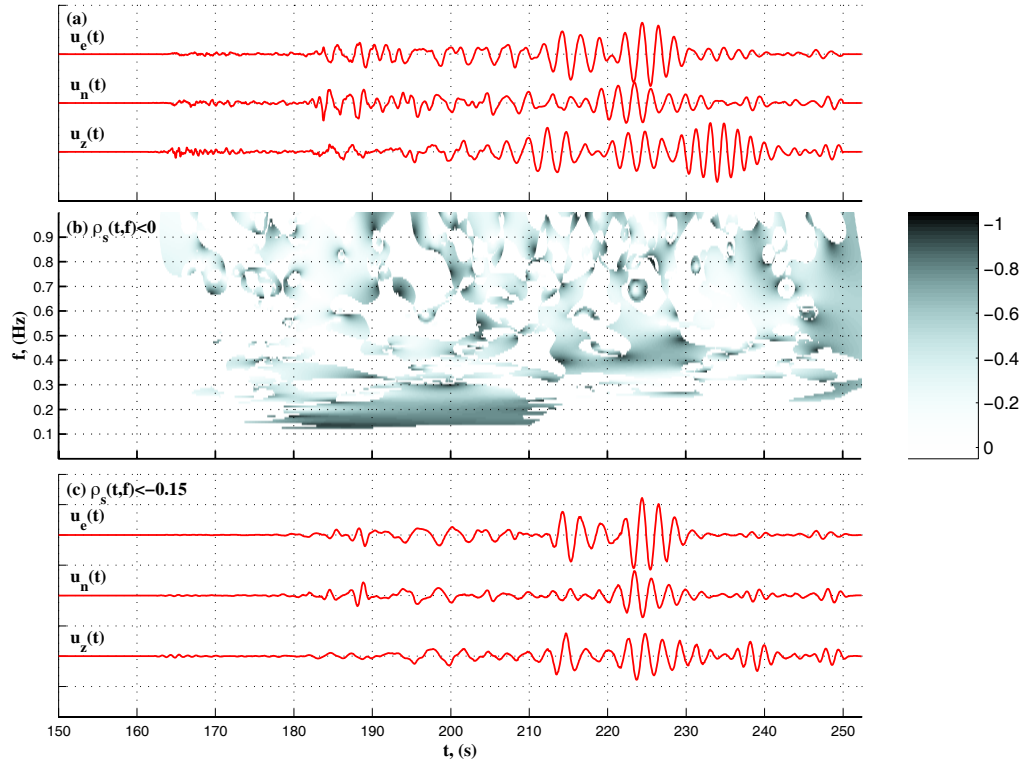


Рис. 4. Регрессивный поляризационный фильтр: (a) — исходная сейсмограмма; (b) — частотно-временной спектр отрицательного коэффициента эллиптичности; (c) — волновые пакеты, соответствующие регрессивному характеру колебаний

трально-временному анализу позволяет обрабатывать и интерпретировать сейсмические волновые поля, для которых характерно большое количество волн различного типа с разным частотным составом, параметрами поляризации и протяженными зонами их интерференции.

Преимуществами данного адаптивного ковариационного метода являются:

- 1) Возможность хорошей регуляции как частотно-временного разрешения за счет подбора параметра вейвлета, так и объемной чувствительности метода за счет изменения параметра  $n$  в соотношении (3.1).
- 2) Допустимость его обобщения на случай анализа сигналов с любым числом компонент.
- 3) Отсутствие проблемы выбора временного окна вычисления элементов ковариационной матрицы, так как оно выбирается автоматически.
- 4) Предложенный метод может использоваться не только для трехкомпонентного сигнала, но и для сигналов с большим числом компонент, однако физическая интерпретация как самого сигнала, так и его поляризационных свойств представляется в этом случае не всегда однозначной.

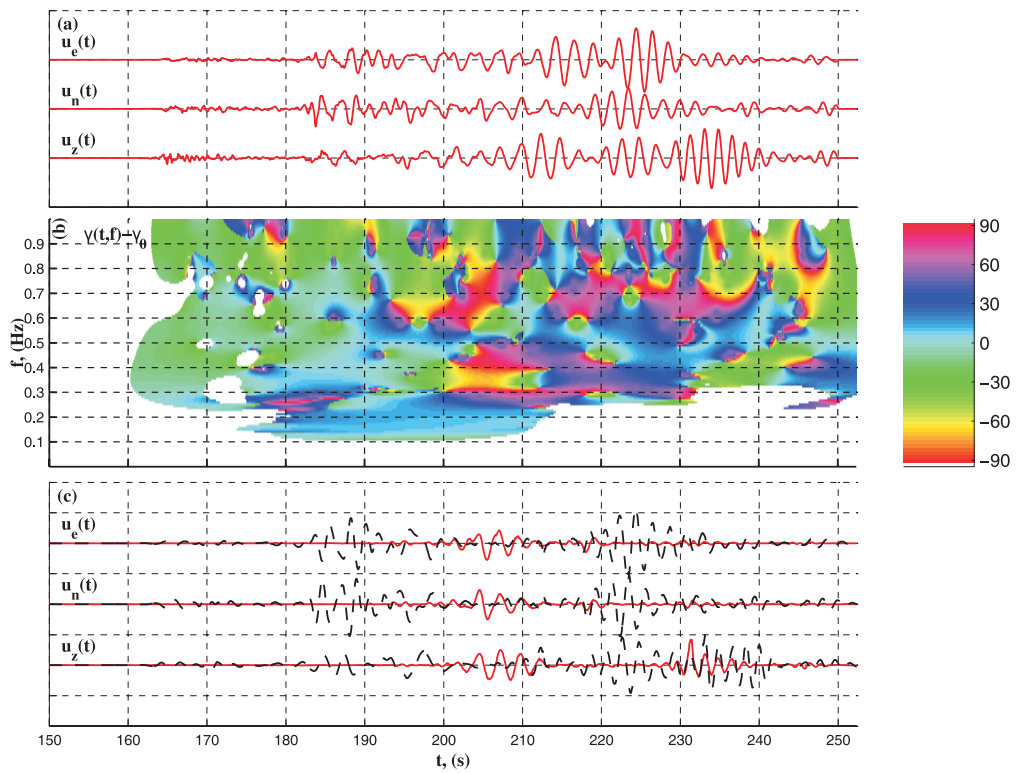


Рис. 5. Объемный направленный фильтр по азимуту: (a) — исходная сейсмограмма; (b) — частотно-временной спектр отклонения от обратного азимута; (c) — волновые пакеты, соответствующие продольным волнам (пунктирные линии) и поперечным волнам (сплошные линии)

## Литература

- [1] Любушин, А.А. Вейвлет-пакетный поляризационный метод для автоматического детектирования вступлений Р и S-волн / А.А.Любушин // Физика земли. – 2006. – №4. – С. 30–39.
- [2] Shieh, C.-F. Ground roll: Rejection using polarization filters / C.-F.Shieh, R.B.Herrmann // Geophysics. – 1990. – V. 55. – No. 9. – P. 1216–1222.
- [3] Wang, Y. Separation of P- and S-wavefield from wide-angle multicomponent OBC data for a basalt model / Y.Wang, S.C.Singh // Geophysical Prospecting. – 2003. – V. 51. – P. 233–245.
- [4] Li, X.L. Complex component analysis of shear wave splitting: theory / X.L.Li, S.Crampin // Geophysical Journal International. – 1991. – V. 107. – P. 597–604.
- [5] Алказ, В.Г. Поляризационный анализ сейсмических колебаний / В.Г.Алказ, Н.И.Онофраш, А.И.Перельберг. – Кишинев: Штиинца, 1977. – 110 с.
- [6] Левшин, А.Л. Поверхностные сейсмические волны в горизонтально-неоднородной земле / А.Л.Левшин, Т.Б.Яновская, А.В.Ландер. – М.: Наука, 1986. – 278 с.
- [7] Александров, С.И. Поляризационный анализ сейсмических волн / С.И.Александров. – М.: ОИФЗ РАН, 1999. – 142 с.
- [8] Гальперин, Е.И. Поляризационный метод сейсмических исследований / Е.И.Гальперин. – М.: Недра, 1977. – 277 с.
- [9] Perelberg, A.I. Applications of seismic polarization analysis / A.I.Perelberg, S.C.Hornbostel // Geophysics. – 1994. – V. 59. – No. 1. – P. 119–130.
- [10] Multicomponent seismic studies using complex trace analysis / R.M.Rene [et al.] // Geophysics. – 1986. – V. 51. – No. 6. – P. 1235–1251.
- [11] Morozov, I.B. Instantaneous polarization attributes and directional filtering / I.B.Morozov, S.B.Smithson // Geophysics. – 1996. – V. 61. – No. 3. – P. 872–881.
- [12] Flinn, E.A. Signal analysis using rectilinearity and direction of particle motion / E.A.Flinn // Proceedings of the IEEE. – 1965. – V. 53. – No 12. – P. 1874–1876.
- [13] Kanasewich, E.R. Time Sequence Analysis in Geophysics / E.R.Kanasewich. – University of Alberta Press, Edmonton, Alberta, 1981.
- [14] Prosser, W.H. Time-frequency analysis of the dispersion of Lamb modes / W.H.Prosser, M.D.Seale, B.T.Smith // The Journal of the Acoustical Society of America. – 1999. – V. 105. – No. 5. – P. 2669–2676.
- [15] Stockwell, R.G. Localization of the complex spectrum: the S transform / R.G.Stockwell, L.Mansinha, R.P.Lowe // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1996. – V. 44. – No. 4. – P. 998–1001.
- [16] Дремин, И.М. Вейвлеты и их использование / И.М.Дремин, О.В.Иванов, В.А.Нечитайло // Успехи физ. наук. – 2001. – Т. 171. – No. 5. – С. 465–561.
- [17] Новиков, И.Я. Основы теории всплесков / И.Я.Новиков, С.Б.Стечкин // Успехи мат. наук. – 1998. – Т. 53. – No. 6. – С. 53–128.
- [18] Астафьева, Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения / Н.М.Астафьева // Успехи физ. наук. – 1996. – Т. 166. – №11. – С. 1145–1170.
- [19] Holschneider, M. Wavelets: an Analysis Tool / M.Holschneider. Oxford: Clarendon Press, 1995.
- [20] Claassen, J.P. Robust bearing estimation for three-component stations / J.P.Claassen // Pure and Applied Geophysics. – 2001. – V. 158. – No. 1. – P. 349–374.

- [21] Time- and frequency-dependent polarization analysis: anomalous surface wave observations in Iberia / H. Paulssen [et al.] // *Geophysical Journal International*. – 1990. – V. 103. – No. 2. – P. 483–496.
- [22] Pinnegar, C.R. Polarization analysis and polarization filtering of three-component signals with the time-frequency S transform / C. R. Pinnegar // *Geophysical Journal International*. – 2006. – V. 165. – No. 2. – P. 596–606.
- [23] Soma N. Reflection technique in time-frequency domain using multicomponent acoustic emission signals and application to geothermal reservoirs / N.Soma, H.Niitsuma, R.Baria // *Geophysics*. – 2002. – V. 67. – No. 3. – P. 928–938.
- [24] Jurkevics, A. Polarization analysis of three-component array data / A.Jurkevics // *Bulletin of the Seismological Society of America*. – 1988. – V. 78. – No. 5. – P. 1725–1743.
- [25] Jackson, G.M. Principal component transforms of triaxial recordings by singular value decomposition / G.M.Jackson, I.M.Mason, S.A.Greenhalgh // *Geophysics*. – 1991. – V. 56. – No. 4. – P. 528–533.
- [26] Instantaneous polarization attributes based on an adaptive approximate covariance method / M. S.Diallo [et al.] // *Geophysics*. – 2006. – V. 71. – No. 5. – P. V99–V104.
- [27] Polarization analysis in the wavelet domain based on the adaptive covariance method / M.Kulesh // *Geophysical International Journal*. – 2007. – V. 170. – No. 2. – P. 667–678.
- [28] Elliptic properties of elastic surface waves in wavelet domain / M.Kulesh [et al.] // *Proceedings of the XXXIII International Summer School "Advanced Problems in Mechanics"*. – 2005. – P. 361–366.
- [29] Estimating polarization attributes with an adaptive covariance method in the wavelet domain / M. S.Diallo [et al.] // *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. – 2005. – P. 1014–1017.
- [30] On-line Bulletin International Seismological Centre // <http://www.isc.ac.uk>, Internatl. Seis. Cent., Thatcham, United Kingdom. 2001.
- [31] Hadiouche, O. Mapping the crust in southeastern Germany using Rayleigh waves in the period range 6-16 s / O.Hadiouche, F.Krüger, R.Kind // *Geophysical Research Letters*. – 1991. – V. 18. – No. 6. – P. 1087–1090.

Поступила в редакцию 13/III/2008;  
в окончательном варианте — 13/III/2008.

## INSTANTANEOUS POLARIZATION PROPERTIES OF THREE-COMPONENT SIGNALS IN WAVELET DOMAIN<sup>3</sup>

© 2008 M.A.Kulesh<sup>4</sup>

In the paper the problem of the determination of polarization properties of seismic signals presented on a three-component seismogram is considered. A new method that allows calculating the time-frequency polarization attributes in the case of a three-dimensional elliptical polarization is proposed. The continuous wavelet transform used by the proposed method as one of the possible approaches of the time-frequency analysis allows us to process and interpret the seismic wave fields characterized by a superposition of different waves with various spectral and polarization properties as well as with extensive interference zones. The proposed method can be used to construct the effective filtering algorithms that we demonstrate by an example of an experimental seismogram filtering.

Paper received 13/III/2008.  
Paper accepted 13/III/2008.

---

<sup>3</sup>Communicated by Dr. Sci. (Tech.), Acad. of RAS, Prof. V.P.Matveenko.

<sup>4</sup>Kulesh Mikhail Alexandrovich ([kma@icmm.ru](mailto:kma@icmm.ru)), Institute of Continuum Mechanics, Ural Division, Russian Academy of Sciences, Perm, 614013, Russia.