

## ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В РЕДУЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ КОССЕРА

© 2009 г. М. А. Кулеш, Е. Ф. Грекова\*, И. Н. Шардаков

*Институт механики сплошных сред УрО РАН  
614013 Пермь, ул. Ак. Королева 1*

*E-mail: kta@icmm.ru*

*\*Институт проблем машиноведения РАН  
199178 Санкт-Петербург; Университет Севильи, 41012, Испания*

*E-mail: elgreco@pdmi.ras.ru*

Поступила в редакцию 4.10.07 г.

Данная статья продолжает цикл работ, посвященных исследованию волн в рамках несимметричной теории упругости, когда деформированное состояние среды характеризуется независимыми векторами перемещения и поворота. Для модели редуцированной среды Коссера рассмотрена задача о распространении поверхностной акустической волны Рэлея в полупространстве. Получено общее аналитическое решение этой задачи. Приведен сравнительный анализ полученного решения с соответствующим решением для упругой классической среды и для полной линейной среды Коссера. Показано, что для волны Рэлея характерна запрещенная зона частот, где волна распространяться не может. Дисперсионная кривая состоит из двух ветвей, причем для одной из них имеется как частота отсечки, так и волновое число отсечки.

PACS: 43.35 P

### ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на обилие фундаментальных работ, посвященных линейным моделям несимметричной теории упругости, в частности, модели среды Коссера, до сих пор нет четкого понимания значимости и места данной теории в механике деформируемого твердого тела. Внести ясность в вопрос о значимости и месте моментной теории может корректно поставленный эксперимент с использованием современных экспериментальных средств.

В сейсмических и геофизических исследованиях сегодня применяются (хотя и не очень широко) механические [1] или лазерные [2] сенсоры, позволяющие непосредственно измерять скорости поворотов упругой или сейсмической волны в трех перпендикулярных направлениях. Это говорит о принципиальной возможности измерений, показывающих характер связи векторов перемещения и поворота.

В подобных экспериментах зачастую предполагается, что компоненты поворотов связаны с перемещениями соотношением, которое соответствует либо классической теории упругости, либо несимметричной теории со стесненным вращением, например, псевдосреде Коссера (см., например, [3]).

$$\theta = 1/2 \operatorname{rot} u. \quad (1)$$

В полной линейной теории среды Коссера [4, 5] векторы поворота  $\theta$  и перемещения  $u$  являются кинематически независимыми. С одной стороны, это приводит к увеличению количества необходимых материальных параметров. С другой стороны, полная теория является физически более правдоподобной, чем, например, псевдосреда Коссера [5].

Известны и другие частные случаи модели среды Коссера, например, редуцированная среда Коссера, для которой три из восьми констант полной среды Коссера равны нулю и, как следствие, отсутствует тензор моментных напряжений. Впервые эта модель была предложена в [6] для описания сыпучих материалов. Она была исследована в изотропном случае в [7], где рассматривалось распространение волн в неограниченной трехмерной редуцированной среде Коссера и было показано, что эта модель обладает рядом интересных свойств. Например, для волн сдвига-вращения имеется запрещенная зона частот, где вся энергия уходит на поворотные движения и не распространяется в среде, а локализуется вблизи источника. В данной работе будет показано, что в редуцированной среде Коссера аналогичным свойством обладает и волна рэлеевского типа.

Основные закономерности распространения линейных упругих волн в средах с микроструктурой были вскрыты в конце 50-х – 60-х годов прошлого века. Что касается именно поверхностных

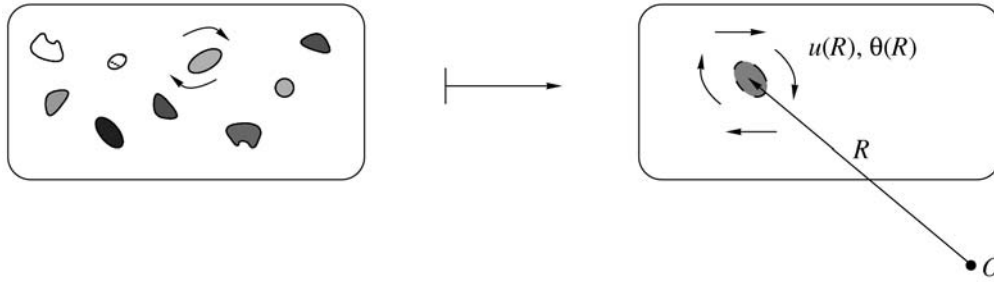


Рис. 1. Грунт с неоднородностями как редуцированная среда Коссера.

волн, являющихся предметом рассмотрения в данной работе, то основные теоретические результаты, связанные с их описанием, можно найти: в [8, 9] для классической среды, в [10] для микрополярированной среды, в [11, 12, 13] для линейной и нелинейной среды Коссера. В данной же работе строится и анализируется точное аналитическое решение для поверхностной волны Рэлея в рамках модели редуцированной среды Коссера. В следующей части работы приводятся основные уравнения данной среды. Далее рассматривается построение общего решения и получается аналог уравнения Рэлея, после чего приводится теоретический и численный анализ полученного уравнения, а так же сопоставление с решениями, полученными ранее [13, 14]. Выводы по этому анализу приведены в заключении.

### ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ РЕДУЦИРОВАННОЙ СРЕДЫ КОССЕРА

В модели редуцированной среды Коссера напряжение зависит от поворота частицы относительно континуума центров масс, но не зависит от взаимного поворота соседних частиц, эта модель представляется адекватной для описания сыпучих сред и грунтов в состоянии консолидации. Действительно, реальные грунты и сыпучие материалы представляют собой среды с микроструктурой. В грунтах имеется большое количество разнообразных неоднородностей – камни, трещины, поры, полости, заполненные жидкостью и т.д. (рис. 1).

Роль “тела-точки” с поворотной степенью свободы в сыпучей среде может играть “усредненная” частица, а в грунте – “усредненная” неоднородность с прилегающей средой. Поворотные степени свободы оказываются важными, поскольку играют большую роль при распространении волн сдвига-вращения в том диапазоне частот, где энергия движения “захватывается” вращениями. При этом часть энергии волны может идти на вращательные колебания неоднородности в грунте или частицы сыпучей среды, так как в сдвиговых полосах сыпучих материалов экспериментально

наблюдается вращение частиц, действующих как “колесики”. Упругая энергия в модели принимается независимой от взаимного поворота частиц, так как в реальных сыпучих средах и грунтах она не является положительно определенной по градиенту поворота. Действительно, в этих материалах, в отличие, например, от магнитных сред, мы не видим упорядоченной структуры поворотов частиц или неоднородностей.

Для описания редуцированной среды Коссера будем использовать следующие уравнения движения [7]:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu)\text{graddiv}\mathbf{u} - (\mu + \alpha)\text{rotrot}\mathbf{u} + \\
 + 2\alpha\text{rot}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{X} = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \\
 2\alpha\text{rot}\mathbf{u} - 4\alpha\boldsymbol{\theta} + \mathbf{Y} = j\ddot{\boldsymbol{\theta}},
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где  $\mathbf{X}$  – вектор удельной плотности объемных сил;  $\mathbf{Y}$  – вектор удельной плотности объемных моментов;  $\mathbf{u}$  – вектор перемещения;  $\boldsymbol{\theta}$  – вектор вращения;  $\mu, \lambda$  – постоянные Ламе;  $\alpha$  – новая физическая постоянная материала в рамках редуцированной среды Коссера;  $\rho$  – плотность;  $j$  – плотность момента инерции (мера инерции среды при вращении).

Данная статья посвящена поиску и анализу некоторых волновых решений уравнений движения (2). Поэтому помимо упругих параметров, введенных выше, также будем использовать ряд дополнительных характеристик акустического поля:

$$\begin{aligned}
 c_l = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_{s\alpha} = \sqrt{\frac{\mu + \alpha}{\rho}}, \\
 \omega_0 = 2\sqrt{\frac{\alpha}{j}}, \quad \omega_1 = \frac{\omega_0 c_s}{c_{s\alpha}} = 2\sqrt{\frac{\alpha\mu}{j(\alpha + \mu)}},
 \end{aligned}$$

где величины  $c_l$  и  $c_s$  обозначают скорости продольной и поперечной волн в упругой классической среде, которая получается из рассматриваемой, если положить  $\alpha = 0$ ,  $c_{s\alpha}$  – предел фазовой скорости волны сдвига-вращения в трехмерной редуцированной среде Коссера при частоте, стремящейся к бесконечности, а  $\omega_0$  и  $\omega_1$  являются двумя критическими частотами поверхност-

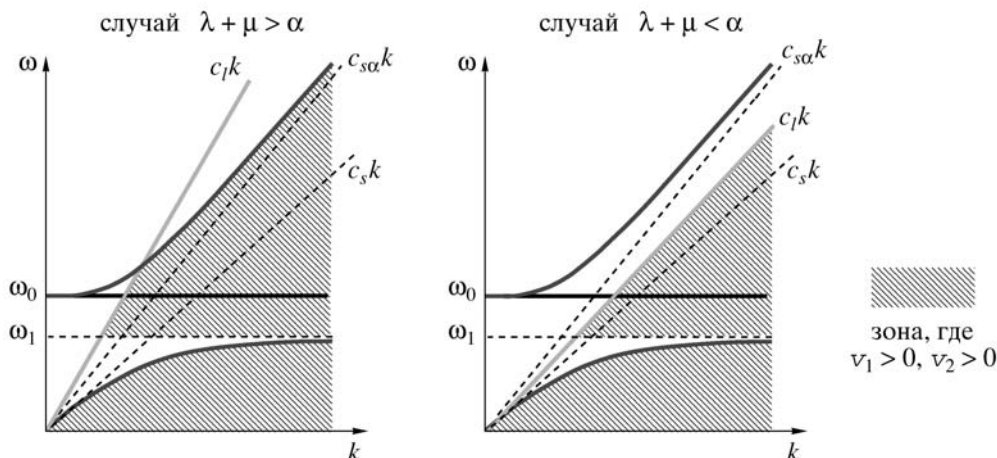


Рис. 2. Области возможного существования волны Рэлея.

ной волны, которые будут подробно анализироваться далее.

Несложно убедиться, что в статическом случае ( $\ddot{\theta} = 0$ ) и при отсутствии объемных моментов ( $\mathbf{Y} = 0$ ) уравнения (2) преобразуются к классическим уравнениям Ламе, где вектор поворота будет определяться соотношением (1). Однако закономерности поведения среды в волновом процессе будут сложнее, чем для классического случая. Также необходимо отметить, что из последнего уравнения системы (2) непосредственно получается связь векторов поворота и перемещения:

$$\theta = 1/2 \operatorname{rot} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{Y} - j\ddot{\theta}}{4\alpha},$$

которая отличается от аналогичной связи псевдосреды Коссера (1) наличием члена, отвечающего за микровращения.

В отличие от классической теории упругости, тензор напряжений  $\tilde{\sigma}$  является несимметричным, а тензор деформаций  $\tilde{\gamma}$  зависит не только от вектора перемещения, но и от вектора поворота:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= 2\mu \tilde{\gamma}^{(S)} + 2\alpha \tilde{\gamma}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\gamma}) \tilde{e}, \\ \tilde{\gamma} &= \operatorname{grad} \mathbf{u} + \theta \times \tilde{e}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $(\cdot)^{(S)}$  — операция симметрирования,  $(\cdot)^{(A)}$  — операция альтернирования,  $I_1(\cdot)$  — первый инвариант тензора,  $\tilde{e}$  — единичный тензор [15].

Распространение плоских волн в линейной упругой редуцированной среде Коссера рассмотрено в [7]. Свободная плоская объемная волна растяжения-сжатия не изменяется по сравнению с классическим случаем — она бездисперсна и имеет ту же скорость  $c_l$ , что продемонстрировано на рис. 2 для двух гипотетических наборов материальных констант серыми прямыми, обозначенными  $c_l k$ .

На волну сдвига, напротив, сильно влияет присутствие вращательных степеней свободы: существует “запрещенная зона частот”, вблизи этой зоны наблюдается сильная дисперсия (рис. 2, сплошные черные линии). Для низких частот  $\omega \rightarrow 0$  фазовая и групповая скорости волны сдвига-вращения стремятся к скорости  $c_s$  волны сдвига в классической среде, а для высоких частот  $\omega \rightarrow \infty$  — к  $c_{s\alpha}$ . В определенной зоне частот взаимосвязь вращательных и трансляционных движений очень сильна, а вдали от нее либо вращения происходят почти независимо от перемещений (на очень низких частотах), либо, наоборот, тела-точки оказываются почти “вмороженными” в упругий каркас и поворачиваются вместе с ним (на очень высоких частотах).

## ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

К построению решений, описывающих поверхностные волны, можно подходить различными путями. Можно, следуя работе [16], искать определенные резонансные ситуации в общем решении задачи об отражении волны от свободной поверхности. Вторым путем (см., например, [8]) связан с поиском решений волновых уравнений, описывающих бегущую вдоль свободной поверхности волну с убывающей вглубь амплитудой. Рассмотрим подробно именно этот путь.

Будем рассматривать полупространство с плоской границей (поверхностью) в случае отсутствия массовых сил и моментов. Оси декартовых координат  $x$  и  $y$  направим по поверхности, а ось  $z$  — вглубь среды. Будем считать, что волна распространяется в направлении оси  $x$ . Поверхностную волну будем определять из условия отсутствия на

поверхности полупространства ( $z = 0$ ) сил, направленных по нормали:

$$\sigma_{zx}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zy}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0. \quad (4)$$

Заметим, что эти граничные условия формально имеют тот же вид, что и в обычной теории упругости, однако тензор напряжений является несимметричным и определяется как трансляционными, так и угловыми деформациями. Тензор моментных напряжений в рассматриваемой модели тождественно равен нулю, в силу чего возмущение по углу поворота  $\theta$  не может распространяться по пространству самостоятельно, без сопутствующей сдвиговой трансляционной волны. Поэтому дополнительных граничных условий, как в случае полной среды Коссера, не требуется.

Монохроматическое решение системы (2), описывающее поверхностную волну с частотой  $\omega$ , ищется в виде

$$u_n = (x, z, t) = U_n(z)e^{i(kx + \omega t)}, \quad (5)$$

$$\theta_n(x, z, t) = \Theta_n(z)e^{i(kx + \omega t)},$$

где  $n = \{x, y, z\}$  – координатный индекс,  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица,  $k$  – волновое число,  $\omega$  – круговая частота,  $t$  – время,  $U_n(z)$  и  $\Theta_n(z)$  – амплитудные функции, зависящие от глубины. Физический смысл имеют здесь только вещественные части компонент векторов перемещения и поворота. Найденные таким образом нормальные волны описываются ортогональными функциями, и в дальнейшем любое немонахроматическое возмущение, в силу принципа суперпозиции, можно представить в виде соответствующих интегралов Фурье.

Подставляя соотношения (5) в уравнения движения (2), мы получим две независимых системы линейных дифференциальных уравнений относительно функций  $U_x(z)$ ,  $U_z(z)$ ,  $\Theta_y(z)$

$$(\alpha + \mu) \frac{d^2}{dz^2} U_x(z) + (\rho\omega^2 - k^2(\lambda + 2\mu)) U_x(z) +$$

$$+ ik(\lambda + \mu - \alpha) \frac{d}{dz} U_z(z) - 2\alpha \frac{d}{dz} \Theta_y(z) = 0,$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d^2}{dz^2} U_z(z) + (\rho\omega^2 - k^2(\alpha + \mu)) U_z(z) + \quad (6)$$

$$+ ik(\lambda + \mu - \alpha) \frac{d}{dz} U_x(z) + 2ik\alpha \Theta_y(z) = 0,$$

$$(j\omega^2 - 2\alpha) \Theta_y(z) + 2\alpha \frac{d}{dz} U_x(z) - 2ik\alpha U_z(z) = 0$$

и  $U_y(z)$ ,  $\Theta_x(z)$ ,  $\Theta_z(z)$

$$(j\omega^2 - 4\alpha) \Theta_x(z) - 2\alpha \frac{d}{dz} U_y(z) = 0,$$

$$(j\omega^2 - 4\alpha) \Theta_z(z) + 2ik\alpha U_y(z) = 0,$$

$$(\alpha + \mu) \frac{d^2}{dz^2} U_y(z) + (\rho\omega^2 - k^2(\alpha + \mu)) U_y(z) + \quad (7)$$

$$+ 2\alpha \frac{d}{dz} \Theta_x(z) - 2ik\alpha \Theta_z(z) = 0.$$

Для нахождения решения системы уравнений (6) воспользуемся подстановкой:

$$U_x(z) = ik\Phi_1(z) - \frac{d}{dz} \Phi_2(z),$$

$$U_z(z) = \frac{d}{dz} \Phi_1(z) + ik\Phi_2(z), \quad (8)$$

$$\Theta_y(z) = \Phi_3(z).$$

Данная подстановка позволяет преобразовать (6) к следующему виду:

$$\frac{d^2}{dz^2} \Phi_1(z) + \left( \frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2 \right) \Phi_1(z) = 0,$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \Phi_2(z) + \left( \frac{\rho\omega^2}{\alpha + \mu} - k^2 \right) \Phi_2(z) + \frac{2\alpha}{\alpha + \mu} \Phi_3(z) = 0,$$

$$(j\omega^2 - 4\alpha) \Phi_3(z) - 2\alpha \frac{d^2}{dz^2} \Phi_2(z) + 2k^2\alpha \Phi_2(z) = 0,$$

откуда получаются решения для функций  $\Phi_n(z)$ , соответствующие уменьшению амплитуды волны с глубиной:

$$\Phi_1(z) = D_1 e^{-v_1 z}, \quad \Phi_2(z) = D_2 e^{-v_2 z}, \quad (9)$$

$$\Phi_3(z) = D_2 \frac{2\alpha(k^2 - v_2^2)}{4\alpha - j\omega^2} e^{-v_2 z},$$

где экспоненциальные показатели  $v_n$  определяются из соотношений

$$v_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}}, \quad v_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} \left( \frac{1 - \omega^2/\omega_0^2}{1 - \omega^2/\omega_l^2} \right)}. \quad (10)$$

Решения (9) и соотношения (8) позволяют определить амплитудные функции, которые мы можем записать совместно с решением системы (7) в следующем виде:

$$U_x(z) = D_1 i k e^{-v_1 z} + D_2 v_2 e^{-v_2 z},$$

$$U_y(z) = D_3 e^{-v_2 z},$$

$$\begin{aligned}
 U_z(z) &= -D_1 v_1 e^{-v_1 z} + D_2 i k e^{-v_2 z}, \\
 \Theta_x(z) &= D_3 \frac{2\alpha v_2}{4\alpha - j\omega^2} e^{-v_2 z}, \\
 \Theta_y(z) &= -D_2 \frac{2\alpha \rho \omega^2}{j\omega^2(\alpha + \mu) - 4\mu\alpha} e^{-v_2 z}, \\
 \Theta_z(z) &= D_2 i \frac{2\alpha k}{4\alpha - j\omega^2} e^{-v_2 z}.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Знаменатель величины  $v_2$  обращается в нуль при частоте  $\omega = \omega_1$ , поэтому эта частота является критической для поверхностной волны. Более того, поверхностная волна будет существовать только тогда, когда экспоненциальные показатели (10) вещественны и отличны от нуля:

$$v_m \in \mathbb{R}, \quad v_m > 0, \quad m = 1, 2. \tag{12}$$

Отметим, что уравнение  $v_1(k, \omega) = 0$  является дисперсионным соотношением для плоской волны растяжения-сжатия в трехмерной среде, а  $v_2(k, \omega) = 0$  – для волны сдвига-вращения [7]. Волна Рэлея будет существовать лишь справа от графиков дисперсионных кривых плоских волн в трехмерной среде, в заштрихованных зонах на рис. 2. Подставим решение (11) в представление (5) и далее в выражения для компонент тензора напряжений (3)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zx} &= (\mu + \alpha) \frac{d}{dz} u_x(x, z, t) + \\
 &+ (\mu - \alpha) \frac{d}{dx} u_z(x, z, t) - 2\alpha \theta_y(x, z, t), \\
 \sigma_{zy} &= (\mu + \alpha) \frac{d}{dz} u_y(x, z, t) + 2\alpha \theta_x(x, z, t), \\
 \sigma_{zz} &= \lambda \frac{d}{dx} u_x(x, z, t) + (\lambda + 2\mu) \frac{d}{dz} u_z(x, z, t).
 \end{aligned}$$

Полученные таким образом компоненты тензора напряжений подставим в граничные условия (4). Это дает нам систему линейных алгебраических уравнений относительно констант  $D_n$ :

$$\begin{bmatrix} k^2 + v_2^2 & -2ikv_2 & 0 \\ 2ikv_1 & k^2 + v_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & v_2 \frac{\omega_0^2 c_s^2 - c_{s\alpha}^2 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = 0.$$

Условием существования решения данной системы является равенство нулю определителя матрицы, что позволяет выразить константу  $D_2$  через  $D_1$ . Необходимо отметить, что граничные условия по напряжениям не ограничивают ам-

плитуду распространяющихся свободных волн, константы  $D_1$  и  $D_3$  остаются неопределенными и имеют смысл амплитудного множителя, на которое домножается все решение целиком. Поэтому, не снижая степени общности, можно принять значения этих констант равными единице.

Условие равенства нулю определителя матрицы также дает нам два дисперсионных соотношения, связывающих волновое число и частоту, что позволяет окончательно выписать решения исходных уравнений движения для двух типов волн:

1. Для волны Рэлея с компонентами  $u_x$ ,  $u_z$  и  $\theta_y$  мы имеем

– дисперсионное соотношение

$$-4v_1 v_2 k^2 + \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}\right)^2 = 0; \tag{13}$$

– компоненты векторов перемещения и поворота

$$\begin{aligned}
 u_x(x, z, t) &= k \left( e^{-v_1 z} - \frac{2v_1 v_2 c_s^2}{2k^2 c_s^2 - \omega^2} e^{-v_2 z} \right) e^{i(kx + \omega t - \pi/2)}, \\
 u_z(x, z, t) &= v_1 \left( e^{-v_1 z} - \frac{2k^2 c_s^2}{2k^2 c_s^2 - \omega^2} e^{-v_2 z} \right) e^{i(kx + \omega t)}, \tag{14}
 \end{aligned}$$

$$\theta_y(x, z, t) = \frac{-v_1 k \omega^2}{(2k^2 c_s^2 - \omega^2)(1 - \omega^2/\omega_1^2)} e^{-v_2 z} e^{i(kx + \omega t - \pi/2)}.$$

2. Для поперечной волны с компонентами  $\theta_x$ ,  $\theta_z$  и  $u_y$  можем записать:

– дисперсионное соотношение

$$v_2 \frac{\omega_0^2 c_s^2 - c_{s\alpha}^2 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0; \tag{15}$$

– компоненты векторов перемещения и поворота

$$\begin{aligned}
 u_y(x, z, t) &= e^{-v_2 z} e^{i(kx + \omega t)}, \\
 \theta_x(x, z, t) &= \frac{2\alpha v_2}{4\alpha - j\omega^2} e^{-v_2 z} e^{i(kx + \omega t)}, \\
 \theta_z(x, z, t) &= -\frac{2\alpha k}{4\alpha - j\omega^2} e^{-v_2 z} e^{i(kx + \omega t - \pi/2)}.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Как видно из соотношения (15), оно выполняется только при  $v_2 = 0$ , что соответствует объемной волне сдвига-вращения, а также при частоте  $\omega_1$ . На этой частоте экспоненциальный показатель  $v_2$  может быть произвольным, что соответствует не распространяющейся волне, а независимым колебаниям частиц. Поэтому решение для попереч-

ной волны далее анализироваться не будет, и дальнейший анализ будет проделан только для волны Рэлея. В отличие от полной среды Коссера, где дисперсионное соотношение волны Рэлея имеет более сложный вид, уравнение (13) может быть решено аналитически. Для этого возведем данное уравнение в квадрат по частям, подставив при этом выражения (10) для  $v_1$  и  $v_2$ :

$$16k^4 \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2} \right) \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} + \frac{\omega^4}{c_s^2(1 + \mu/\alpha)(\omega^2 - \omega_1^2)} \right) - \left( 2k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} \right)^4 = 0. \quad (17)$$

В последнем уравнении раскроем скобки, сгруппируем слагаемые по волновому числу  $k$ , разделим все уравнение на величину  $\omega^8/c_s^8$ , выполним замену переменных  $k = \omega \sqrt{x/2}/c_s$  и получим кубическое уравнение относительно  $x$ :

$$a(\omega)x^3 + b(\omega)x^2 + 4x - 1 = 0,$$

$$a(\omega) = 2 \left( 1 - \frac{c_s^2}{c_l^2} + \frac{\omega^2}{(1 + \mu/\alpha)(\omega^2 - \omega_1^2)} \right), \quad (18)$$

$$b(\omega) = 2 \left( 2 \frac{c_s^2}{c_l^2} - 3 - \frac{2c_s^2\omega^2}{c_l^2(1 + \mu/\alpha)(\omega^2 - \omega_1^2)} \right).$$

Данное уравнение обладает тремя корнями:

$$x_1(\omega) = \frac{\sqrt[3]{4c(\omega)} - \frac{b(\omega)}{3a(\omega)} + \frac{\sqrt[3]{2(b(\omega) - 12a(\omega))}}{3a(\omega)c(\omega)}}{6a(\omega)},$$

$$x_{2,3}(\omega) = -\frac{\sqrt[3]{4c(\omega)}}{12a(\omega)} - \frac{b(\omega)}{3a(\omega)} - \frac{\sqrt[3]{2(b^2(\omega) - 12a(\omega))}}{6a(\omega)c(\omega)} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\sqrt[3]{4c(\omega)}}{6a(\omega)} - \frac{\sqrt[3]{2(b^2(\omega) - 12a(\omega))}}{3a(\omega)c(\omega)} \right), \quad (19)$$

$$c(\omega) = \sqrt[3]{27a^2(\omega) - 2b^2(\omega) + 36a(\omega)b(\omega) + d(\omega)},$$

$$d(\omega) = 3\sqrt{3}a(\omega)\sqrt{27a^2(\omega) - 4b^3(\omega) - 16b^2(\omega) + 72a(\omega)b(\omega) + 256a(\omega)},$$

однако дисперсионное соотношение будет связано только с вещественным положительным корнем или корнями. Данное условие будет обеспечивать вещественность волновых чисел  $k_m(\omega) = \omega \sqrt{x_m(\omega)}/2/c_s \in \mathbb{R}$ , что, в свою очередь, является необходимым условием вещественности экспоненциальных показателей (12).

### АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ

Рассмотрим некоторые свойства полученного выше решения. Типичный численный пример дисперсионных кривых и компонент перемещений для некоторого гипотетического набора материальных констант приведен на рис. 3. На всех графиках толстая сплошная линия обозначает решение для редуцированной среды Коссера, тонкие вертикальные линии соответствуют критическим частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , тонкие сплошные серые линии соответствуют скоростям  $c_s$  и  $c_l$ , штрихпунктирные линии на графике (а) соответствуют дисперсионной кривой объемной волны сдвига-вращения, пунктирная линия – это решение для волны Рэлея в классическом случае, а точечная линия – решение для волны Рэлея для среды Коссера [13]. Константы в приведенном численном примере таковы:  $\lambda = 2.8 \times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu = 4.0 \times 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 1.0 \times 10^3$  кг/м,  $\alpha = 2.0 \times 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $j = 1.0 \times 10^4$  кг/м,

$c_s = 200$  м/с,  $c_l = 600$  м/с,  $\omega_1 = 730.2967$  рад/с,  $\omega_2 = 622.7992$  рад/с.

Дисперсионное уравнение (13), определяющее основные свойства волны Рэлея, имеет достаточно сложный вид. Один из возможных путей его анализа состоит, например, в следующем. Можно асимптотически исследовать уравнения (17) или (18), проверяя выполнение условия (12), необходимого для существования поверхностной волны рассматриваемого типа. Математические детали этого анализа собраны в приложении, здесь же мы приведем только физическую интерпретацию полученных результатов:

1. Частотная зависимость волнового числа  $k(\omega)$ , приведенная на рис. 3а, демонстрирует, что для малых волновых чисел  $k$  существует меньше возможных частот распространения  $\omega$ , чем для остальных. Кроме низкочастотной дисперсионной ветви, существует дисперсионная ветвь, выходящая из точки  $(\omega_1; \omega_1/c_l)$  дисперсионной плоскости, не лежащей ни на одной из осей. Для этой ветви существует не только частота отсечки, но и волновое число отсечки. При малых  $\lambda$  вблизи данной точки ветвь приближается к прямой, соответствующей продольным волнам в трехмерной среде, а при больших  $\lambda$  она становится почти вертикальной (второй случай на графике не показан).

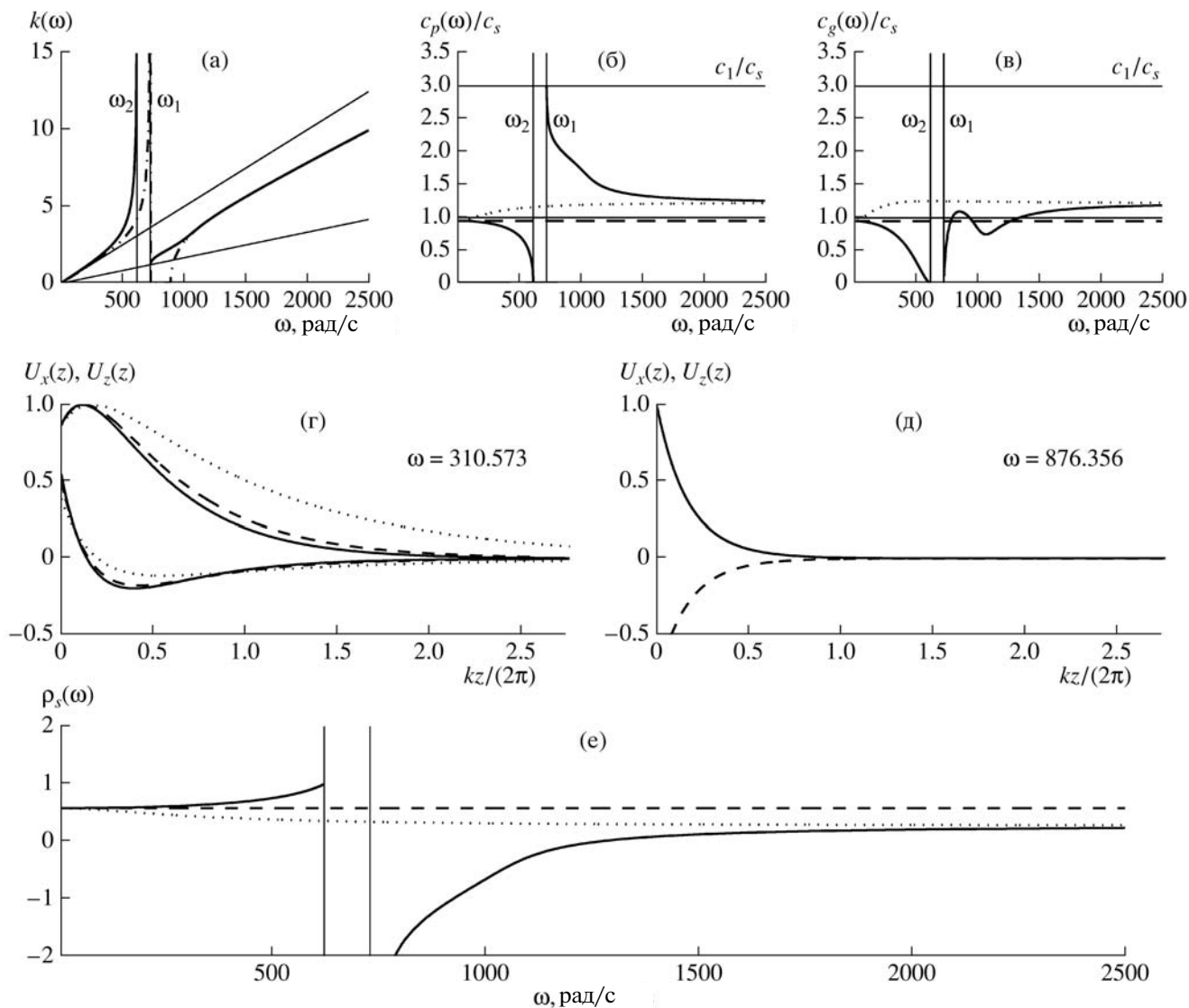


Рис. 3. Дисперсионные кривые, перемещения и эксцентриситет волны Рэлея.

2. Также из рис. 3а видно, что у одной из дисперсионных ветвей существует вертикальная асимптота на критической частоте  $\omega_2$ :

$$\omega_2 = \omega_1 \sqrt{\frac{A}{1+A}} < \omega_1, \quad A = \left(1 + \frac{\mu}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right).$$

Поскольку для достаточно близких к  $\omega_2$  частот возможно возникновение любых достаточно коротковолновых поверхностных возмущений, это указывает, на наш взгляд, на то, что при таких частотах колебания тел-точек среды становятся почти несвязанными, и возмущение может иметь достаточно произвольную форму. Это происходит за счет своеобразной комбинации сдвиговых трансляций и вращения тел-точек. Вероятно, бо-

лее подробный анализ покажет возможность локализации волн.

3. Частотная зависимость фазовой скорости (рис. 3б) демонстрирует, что для нее существует единственный (конечный) предел  $c_\infty$  при  $\omega \rightarrow \infty$  и  $k \rightarrow \infty$ , определяемый из уравнения

$$g(\xi) = \xi^3 - 8\xi^2 + 8\xi(3 - 2pq) - 16(2 - (p + q)) = 0, \quad (20)$$

$$\xi = c_\infty^2/c_s^2, \quad p = c_s^2/c_l^2 \in (0; 1/2),$$

$$q = \mu/(\mu + \alpha) \in (0; 1).$$

Из данного уравнения в частном случае при  $\alpha = 0$  вытекает уравнение для определения скорости волны Рэлея в классической среде [16]. При  $\omega \rightarrow 0$  существует единственный предел фазовой скорости волны Рэлея, равный скорости волны Рэлея в классической среде.

4. Фазовая скорость распространения волны Рэлея на больших частотах всегда меньше как фазовой скорости волны сдвига-вращения на больших частотах, так и фазовой скорости продольной волны в трехмерном бесконечном континууме. В то же время она может быть выше фазовой скорости волны сдвига в неограниченной трехмерной среде на малых частотах  $c_s$  (при достаточно большом  $\alpha$  по сравнению с  $\mu$ ). При достаточно малом сопротивлении вращению (по сравнению с сопротивлением трансляционному сдвигу) свойства среды на малых и больших частотах не столь сильно различаются, и фазовая скорость волны Рэлея на малых частотах не превосходит  $c_s$ .

5. Волна Рэлея не существует при  $\omega_2 \leq \omega \leq \omega_1$ . Это видно как на графиках скоростей, так и на рис. 3в. Необходимо отметить, что существование запрещенных зон выше  $\omega_2$  и ниже  $\omega_1$  можно показать аналитически, однако то, что они покрывают весь отрезок  $[\omega_2; \omega_1]$ , авторам строго доказать не удалось. Наличие запрещенной зоны (или зон) частот связано с отсутствием реакции среды на взаимный поворот тел-точек и указывает на возможность локализации, когда энергия волн определенного диапазона при помощи вращательных степеней свободы "захватывается" неоднородностью, и часть возмущения не распространяется.

6. Зависимости компонент перемещений  $U_x$  и  $U_z$  от нормированной на волновое число глубины для двух частот, соответствующих нижней и верхней ветвям дисперсионной кривой, приведены на рис. 3г, д. Они демонстрируют, что в редуцированной среде Коссера амплитуда волны затухает с глубиной для обеих дисперсионных ветвей, но скорость затухания отличается от случая классической среды и полной среды Коссера.

7. Поведение коэффициента эллиптичности  $\rho_s = U_x/U_z$  на поверхности  $z = 0$  в зависимости от частоты показано на рис. 3е. Оно существенно отличается как от классического случая, где эллиптичность не зависит от частоты, так и от полной среды Коссера, где коэффициент эллиптичности лежит в интервале  $[-1, 1]$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено и проанализировано общее аналитическое решение задачи распространения поверхностной волны в редуцированной среде Коссера. Приведен анализ полученного решения и показано, что оно имеет ряд ярких отличий от аналогичных решений классической теории упругости и решений в рамках полной модели среды Коссера:

1. Как и случае полной модели среды Коссера, волна Рэлея в редуцированной среде обладает дисперсией, в то время как в классической теории упругости волны Рэлея бездисперсны;

2. В полосе частот  $[\omega_2; \omega_1]$  либо в некоторых частотных интервалах внутри этого промежутка волна Рэлея в редуцированной среде распространяться не может, что является наиболее значимым отличием модели редуцированной среды как от классической теории упругости, так и от полной модели среды Коссера, где запрещенных частотных интервалов нет;

3. Одна из дисперсионных ветвей начинается в точке  $[\omega_1/c_l; \omega_1]$  дисперсионной плоскости, т.е. для нее существует не только частота отсечки, но и волновое число отсечки. В классической среде, равно как и в полной модели Коссера, это не имеет места;

4. В редуцированной среде не существует поверхностной волны, затухающей с глубиной и имеющей одну поперечную компоненту, параллельную граничной поверхности и перпендикулярную направлению распространения волны. Это отличает модель редуцированной среды от полной модели среды Коссера, где такая волна обнаружена [13].

Авторы признательны доктору Х.К. Херману за ценное обсуждение. Данное исследование было поддержано Фондом содействия отечественной науке, правительством Андалузии (проект FQM-421), министерством образования Испании (проект FIS2006-03645), Shell International E.& P. (проекты "Waves in complex media", "Advanced modelling of mechanical behaviour of rocks and soils") и Американским фондом гражданских исследований и развития (CRDF) в рамках гранта молодым ученым №Y2-P-09-04.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

#### АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ

*Свойство 1.* При  $\omega \rightarrow \omega_1 + 0$  в уравнении (18) имеем:  $a \rightarrow +\infty$ ,  $b \rightarrow -\infty$ , и уравнение имеет единственный вещественный положительный корень  $x_3 \approx 2c_s^2/c_l^2$ , подходящий сверху к угловой точке  $(\omega_1/c_s; \omega_1)$  границы заштрихованной зоны рис. 2. Асимптотический анализ уравнения (17) дает

$$k - \frac{\omega_1}{c_l} \approx \frac{\omega - \omega_1}{c_l} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} \right) \frac{c_l^6}{c_s^6} \left( 2 \frac{c_s^2}{c_l^2} - 1 \right)^4 \right].$$

Поскольку выражение в квадратных скобках больше единицы, соответствующий участок дисперсионной ветви лежит в заштрихованной зоне рис. 2 и при малых  $\lambda$  ветвь близка к прямой, соответствующей продольным волнам, а при больших  $\lambda$  — к вертикальной линии.

*Свойство 2.* Из уравнения (17) при  $\omega \neq \omega_1$  имеем

$$\omega^2 - \omega_1^2 = \frac{\omega^4 k^4 (k^2 - \omega^2/c_l^2)}{16c_s^2(1 + \mu/\alpha) \left( \left( k^2 - \frac{\omega^2}{2c_s^2} \right)^4 - k^4 (k^2 - \omega^2/c_l^2)(k^2 - \omega^2/c_s^2) \right)}.$$

Полагая  $k \rightarrow \infty$ ,  $\omega = O(1)$ , получаем  $\omega \rightarrow \omega_2$ . Кусок прямой  $\omega = \omega_2$  при больших  $k$  лежит в заштрихованной зоне рис. 2, так что частотам, меньшим данной и близким к ней, действительно соответствуют волны рэлеевского типа, все более короткие при приближении к частоте  $\omega_2$ .

**Свойство 3.** Уравнение (20) получается из (17) после соответствующей замены переменных и предельного перехода. Легко показать, что  $g(0)$  монотонно возрастает,  $g(0) < 0$  и  $g(\xi) \rightarrow \infty$  при  $\xi \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что у уравнения (20) существует единственный корень, и он положителен. Необходимо проверить, что этот корень действительно соответствует волне Рэлея, т.е. выполняется условие (12). Из рис. 2 видно, что в данном случае это условие формулируется так: для найденного корня должно выполняться условие  $c_s < c_{sa}$ ,  $c_\infty < c_l$ , или  $\xi < 1/p$ ,  $\xi < 1/q$ . Легко проверить, что  $g(1/p) = p^{-3} - 8p^{-2} + 24p^{-1} - 32 + 16p > 0$ , поскольку  $p < 1/2$ , и  $g(1/q) = q^{-3} - 8q^{-2} + 24q^{-1} - 32 + 16q > 0$ , поскольку  $0 < q < 1$ . В совокупности с монотонным возрастанием  $g(\xi)$  это означает, что искомый корень меньше  $1/p$  и  $1/q$ , т.е. условие (12) выполняется, и  $c_\infty$  соответствует пределу фазовой скорости волны Рэлея в данной среде для больших частот. Предел при  $\omega \rightarrow 0$  рассматривается аналогично.

**Свойство 4.** Справедливость первого утверждения (для высоких частот) следует из условия (12). Сравнить скорости  $c_\infty$  и  $c_s$  можно, используя уравнение (20) и факт монотонного возрастания функции  $g(\xi)$ . Условие  $c_\infty < c_s$  (или  $\xi < 1$ ) выполняется тогда и только тогда, когда  $p + q - pq > 15/16$ , что равносильно неравенству

$$\frac{\alpha}{\mu} < \frac{2 + \lambda/\mu}{14 + 15\lambda/\mu}.$$

Правая часть последнего неравенства при любых  $\lambda$ ,  $\mu$  лежит в промежутке  $(1/15; 1/7)$ , так что при  $\alpha < \mu/15$  мы будем иметь  $c_\infty < c_s$ , а при  $\alpha > \mu/7$  вне зависимости от  $\lambda$  получим  $c_\infty > c_s$ .

**Свойство 5.** При  $\omega = \omega_2$  уравнение (18) превращается в квадратное, так как  $a(\omega_2) = 0$ . Имеем  $x_{\pm} = -2/b \pm \sqrt{4/b^2 + 1/b}$ , где  $b = b(\omega_2) = -4(1 - c_s^2/c_l^2)^2 - 2 < -2$ . Подкоренное выражение неотрицательно при  $\mu > \lambda\sqrt{2}/2$ . Если это условие не выполняется, то оба корня комплексны, и вещественных решений дисперсионного уравнения

нет. Если  $\mu > \lambda\sqrt{2}/2$ , то оба корня вещественны. Ясно, что  $x_- < 0$ , и соответствующее  $k$  — мнимое. Можно показать, что  $x_+$  дает точку, лежащую за пределами заштрихованной зоны рис. 2, т.е. волны Рэлея не существует. При  $\omega$ , близком к  $\omega_2$ , оба корня уравнения (18) мало изменяются, то есть остаются за пределами заштрихованной зоны, однако на бесконечности появляется третий корень. При  $\omega \rightarrow \omega_2 + 0$  имеем  $x_3 \rightarrow -\infty$ , т.е. вещественного  $k$  не существует. Таким образом, выше  $\omega_2$  находится запрещенная зона частот.

При  $\omega \rightarrow \omega_1 - 0$  нарушается условие (12) — нет решений в заштрихованной зоне рис. 2. Поскольку у дисперсионных кривых существует лишь одна вертикальная асимптота на частоте  $\omega_2 < \omega_1$ , то имеется полоса частот конечной ширины, лежащая ниже  $\omega_1$ , где волна рэлеевского типа не существует.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nigbor R.L. Six-degree-of-freedom ground-motion measurement // Bulletin of the Seismological Society of America. 1994. V. 84. № 5. P. 1665–1669.
2. Igel H., Schreiber U., Flaws A., Schuberth B., Velikoseltsev A., Cochard A. Rotational motions induced by the M8.1 Tokachi-oki earthquake, September 25, 2003 // Geophysical research letters. 2005. V. 32. P. L08309.
3. Савин Г.Н., Лукашов А.А., Лыско Е.М., Временико С.В., Агасьев Г.Г. Распространение упругих волн в континууме Коссера со стесненным вращением // Прикл. механика. 1970. Т. 6. № 6. С. 37–41.
4. Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. Hermann, Paris. 1909.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
6. Schwartz L.M., Johnson D.L., Feng S. Vibrational modes in granular materials // Physical Review Letters. 1984. V. 52. № 10. P. 831–834.
7. Grekova E.F., Herman G.C. Wave propagation in rocks modeled as reduced Cosserat continuum // Proceedings of 66th EAGE (European Association of Geoscientists and Engineers) conference, Paris. 2004. P. P098.
8. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука. 1981. 287 с.
9. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam; London: North-Holland publishing company. 1973. 443 p.
10. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories. I. Foundation and Solids. Springer-Verlag New York. 1998. 319 p.

11. *Лялин А.Е., Пирожков В.А., Степанов Р.Д.* О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журн. 1982. Т. 28. № 6. С. 838–840.
12. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1999. 328 с.
13. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 2. С. 227–235.
14. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Р эля в рамках континуума Коссера // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 4. С. 116–124.
15. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). СПб.: Лань. 2003. 832 с.
16. *Гринченко В.Т.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. М.: Наука. 1981. 284 с.