

М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков

Институт механики сплошных сред УрО РАН (г. Пермь)

О СВОЙСТВАХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ КОССЕРА

Abstract

It is shown that in half-space which dynamic behavior being described by the Cosseratt model instead of elasticity theory, a new wave mode appears. Moreover, there exists a frequency depending only on material parameters for which the velocities of *Rayleigh waves* and cross *surface waves* are equal.

В данной работе рассматривается задача о распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера (случай полупространства). Деформированное состояние характеризуется независимыми векторами перемещения и поворота, тензоры напряжений и моментных напряжений являются несимметричными [1,2]. В отличие от известных работ [3-6], решения уравнений движения ищутся в виде волновых пакетов, задаваемых спектром Фурье произвольной формы. Полученное решение состоит из двух независимых частей, одна из которых описывает волну Рэлея, а вторая соответствует поперечной волне, затухающей с глубиной. Для обоих типов волн выписаны аналитические решения в перемещениях. Особо необходимо отметить, что, в отличие от волны Рэлея, полученное решение для поперечной поверхностной волны не имеет аналогов в классической теории упругости. В качестве численных иллюстраций приведено сравнение решения для поперечной волны с решением для волны Рэлея.

Постановка задачи

Рассмотрим полупространство, поверхность которого свободна от нагрузок в случае отсутствия массовых сил и моментов. Для описания упругой среды Коссера будем использовать следующие соотношения [1]:

$$\begin{aligned} (2\mu+\lambda)\text{grad div } \mathbf{u} - (\mu+\alpha)\text{rot rot } \bar{\mathbf{u}} + 2\alpha \text{rot } \bar{\boldsymbol{\omega}} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ (2\gamma+\beta)\text{grad div } \bar{\boldsymbol{\omega}} - (\gamma+\varepsilon)\text{rot rot } \bar{\boldsymbol{\omega}} + 2\alpha \text{rot } \bar{\mathbf{u}} - 4\alpha \ddot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} &= \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{u} – вектор перемещения, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор вращения, λ, μ – постоянные Ламе, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – физические постоянные материала в рамках моментной теории упругости, ρ – плотность, j – параметр, отвечающий за меру инерции среды при вращении. Оси декартовых координат x и y направим по поверхности, а ось z – в глубь полупространства. Граничные условия примут вид:

$$\sigma_{zx} = 0, \sigma_{zy} = 0, \sigma_{zz} = 0, \mu_{zx} = 0, \mu_{zy} = 0, \mu_{zz} = 0. \quad (2)$$

Построение решения

Пусть волна распространяется в направлении оси x . Общее решение системы (1) представим в виде Фурье-интегралов, что соответствует представлению решения как ограниченного во временном и Фурье-пространствах волнового пакета произвольной

формы (физический смысл имеют здесь только вещественные части соответствующих компонент):

$$\begin{aligned} u_n(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} U_n(z) e^{i(kx+ft)} \widehat{S}_0(f) df, \\ \omega_n(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} W_n(z) e^{i(kx+ft)} \widehat{S}_0(f) df, \end{aligned} \quad (3)$$

где $n = \{x, y, z\}$ – координатный индекс, i – мнимая единица, k – волновое число, f – круговая частота, t – время, $U_n(z)$ и $W_n(z)$ – амплитудные функции, зависящие от глубины, а $\widehat{S}_0(f)$ – комплексный Фурье-спектр сигнала-источника, определяющий форму волнового пакета.

Выполним непрерывное Фурье-преобразование соотношений (1)–(3), подставим Фурье-образ решения в спектральную систему и получим две развязанные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее обезразмерим полученные системы с использованием параметров:

$$\begin{aligned} A &= X_0 \sqrt{\frac{\mu}{B(\gamma + \varepsilon)}}, \quad B = \frac{\alpha + \mu}{\alpha}, \quad C = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \\ C_1^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_2^2 = \frac{\mu}{\rho X_0^2 f_0^2}, \quad C_3^2 = \frac{BC_2^2}{B-1}, \quad C_4^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{jX_0^2 f_0^2}, \quad C_5^2 = \frac{\gamma + 2\beta}{jX_0^2 f_0^2}, \end{aligned}$$

где X_0 – некоторый характерный размер, а f_0 – характерная частота.

Решением получившихся систем будут являться выражения для амплитудных функций, подставляя которые в (3), окончательно получим:

$$\begin{aligned} u_x(x, z, t) &= F_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -ke^{-v_0 z} - \frac{F_1}{k} e^{-v_1 z} + \frac{F_2}{k} e^{-v_2 z} \right\} e^{i(kx+ft-\pi/2)} \widehat{S}_0(f) df, \\ u_y(x, z, t) &= \frac{G_0(B-1)}{2A^2 B} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{G_1}{k\xi_1} \left(a_1 - \frac{f^2}{C_4^2} + \frac{4A^2 B}{B-1} \right) e^{-\xi_1 z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{G_2}{k\xi_2} \left(a_2 - \frac{f^2}{C_4^2} + \frac{4A^2 B}{B-1} \right) e^{-\xi_2 z} \right\} e^{i(kx+ft-\pi/2)} \widehat{S}_0(f) df, \\ u_z(x, z, t) &= F_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -v_0 e^{-v_0 z} - \frac{F_1}{v_1} e^{-v_1 z} + \frac{F_2}{v_1} e^{-v_2 z} \right\} e^{i(kx+ft)} \widehat{S}_0(f) df, \\ \omega_x(x, z, t) &= G_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -ke^{-\xi_0 z} - \frac{G_1}{k} e^{-\xi_1 z} + \frac{G_2}{k} e^{-\xi_2 z} \right\} e^{i(kx+ft-\pi/2)} \widehat{S}_0(f) df, \\ \omega_y(x, z, t) &= \frac{F_0 B}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{F_1}{k v_1} \left(a_1 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{-v_1 z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{F_2}{k v_2} \left(a_2 - \frac{f^2}{C_3^2} \right) e^{-v_2 z} \right\} e^{i(kx+ft-\pi/2)} \widehat{S}_0(f) df, \\ \omega_z(x, z, t) &= G_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\xi_0 e^{-\xi_0 z} - \frac{G_1}{\xi_1} e^{-\xi_1 z} + \frac{G_2}{\xi_2} e^{-\xi_2 z} \right\} e^{i(kx+ft)} \widehat{S}_0(f) df. \end{aligned}$$

Экспоненциальные показатели амплитудных функций определяются здесь выражениями:

$$v_0 = \sqrt{k^2 - \frac{f^2}{C_1^2}}, \quad \xi_0 = \sqrt{k^2 - \frac{f^2}{C_5^2} + \frac{2A^2BC_4^2}{(B-1)C_5^2}}, \quad v_{1,2} = \xi_{1,2} = \sqrt{k^2 - a_{1,2}},$$

$$a_{1,2} = \frac{C_3^2 + C_4^2}{2C_3^2C_4^2} f^2 - 2A^2 \pm \sqrt{\frac{(C_3^2 - C_4^2)^2}{4C_3^4C_4^4} f^4 - \frac{2A^2(C_2^2C_3^2 - 2C_3^2C_4^2 + C_2^2C_4^2)}{C_2^2C_3^2C_4^2} f^2 + 2A^4}.$$

Вещественные константы F_m и G_m определяются из обезразмеренных граничных условий (2):

$$F_m = (-1)^m ikv_m \frac{D_m}{F_0}, \quad G_m = (-1)^m ik\xi_m \frac{E_m}{G_0}, \quad m = 1, 2,$$

где F_0 и G_0 – неопределенные константы, а комплексные величины D_m и E_m являются решением однородных систем:

$$M_1 \cdot \{D_0, D_1, D_2\}^T = 0, \quad M_2 \cdot \{E_0, E_1, E_2\}^T = 0.$$

Из условия разрешимости этих систем получаем следующие волновые уравнения:

1. Уравнение $\det(M_1) = 0$ описывает волну Рэлея с компонентами u_x, u_z, ω_y , где

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2k^2 - f^2 / C_2^2 & -2ikv_1 & -2ikv_2 \\ 2ikv_0 & 2k^2 - f^2 / C_2^2 & 2k^2 - f^2 / C_2^2 \\ 0 & (a_1 - f^2 / C_3^2)v_1 & (a_2 - f^2 / C_3^2)v_2 \end{bmatrix}.$$

2. Уравнение $\det(M_2) = 0$ описывает поперечную волну с компонентами u_y, ω_x, ω_z :

$$M_2 = \begin{bmatrix} \frac{2ik}{1-B} & \left(2 + \frac{a_1C_4^2 - f^2}{2A^2C_4^2}\right)\xi_1 & \left(2 + \frac{a_2C_4^2 - f^2}{2A^2C_4^2}\right)\xi_2 \\ ik(1+C)\xi_0 & k^2C + \xi_1^2 & k^2C + \xi_2^2 \\ \left(\frac{2C_5^2}{(1+C)C_4^2} - 1\right)(k^2 - \xi_0^2) - 4\xi_0^2 & 4ik\xi_1 & 4ik\xi_2 \end{bmatrix}.$$

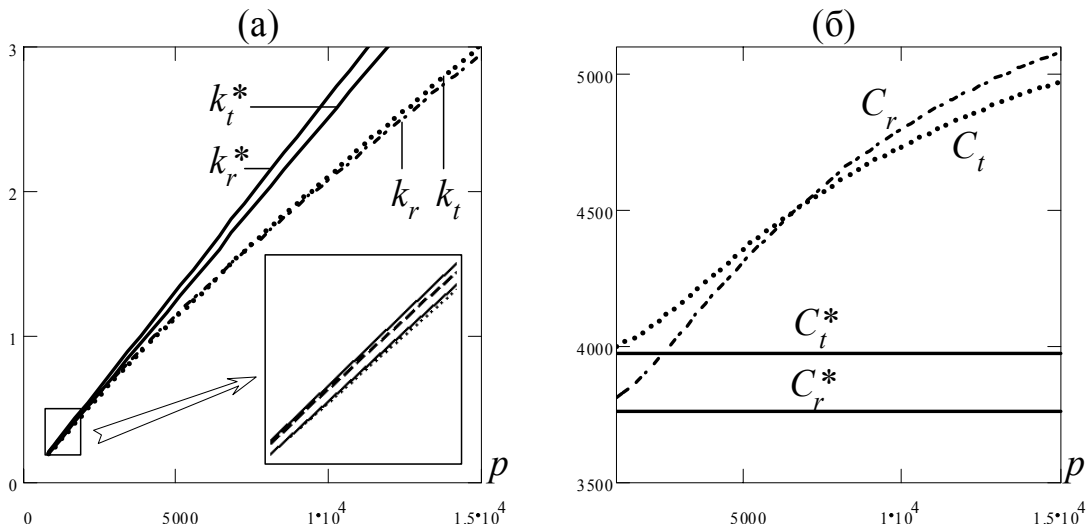


Рис. 1. Сравнение волновых чисел (а) и фазовых скоростей (б) для классической и несимметричной сред

Зависимости волновых чисел и фазовых скоростей от физической частоты p , измеряемой в Гц, приведены на рис. 1, где k_r^*, C_r^* (сплошные линии) – решение для волны Рэлея в классическом случае; k_t^*, C_t^* (также сплошные линии) – решение для объемной поперечной волны в классическом случае; k_r, C_r (пунктирные линии) – решение для волны Рэлея в среде Коссера; k_t, C_t (точечные линии) – решение для поперечной волны в среде Коссера.

На рис. 2 приведены зависимости компонент перемещений полученного решения от относительной глубины, отнесенной к длине волны. Сплошная линия соответствует функции u_x , пунктирная – u_y , точечная – u_z . Данная зависимость иллюстрирует, что поперечная волна является типично поверхностной, причем толщина слоя локализации зависит от частоты.

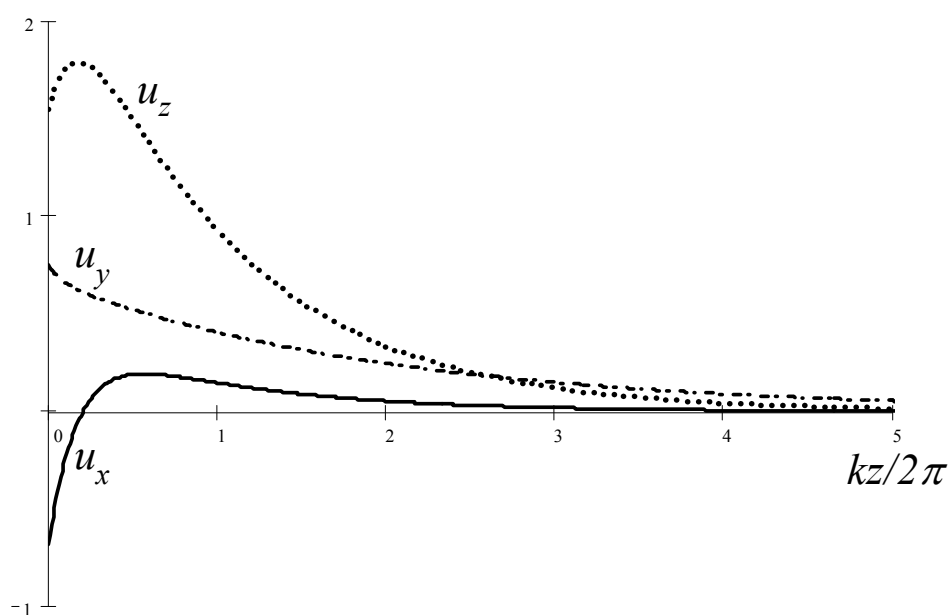


Рис. 2. Сравнение компонент перемещения в зависимости от глубины (z)

Заключение

Основной результат, полученный в данной работе, состоит в следующем. В полупространстве, динамическое поведение которого описывается моделью среды Коссера, помимо поверхностной эллиптической волны Рэлея может существовать также поверхностная волна, имеющая одну поперечную компоненту перемещений. Геометрически эта волна подобна волне Лява, однако в классической теории упругости существование волны Лява как поверхностной волны определяется наличием слоя на полупространстве, при стремлении толщины слоя к нулю волна Лява переходит в объемную. Таким образом, в среде Коссера обнаруживается качественно новая волновая мода, аналогов которой в классической теории упругости нет.

В качестве второго результата можно выделить тот факт, что существует частота, зависящая только от материальных параметров, для которой скорости распространения в полупространстве волны Рэлея и поперечной поверхностной волны совпадают.

Библиографический список

1. Новацкий, В. Теория упругости /В.Новацкий. – М.: Мир, 1975.
2. Пальмов, В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости /В.А. Пальмов // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. – 28. – № 3. – С. 401–408.
3. Ерофеев, В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой /В.И. Ерофеев. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
4. Eringen, A.C. Microcontinuum Field Theories. I. Foundation and Solids /A.C. Eringen // Springer-Verlag. – New York, 1999. – С. 319.
5. Лялин, А.Е. О распространении поверхностных волн в среде Коссера /А.Е. Лялин, В.А. Пирожков, Р.Д. Степанов //Акустический журнал. – 1982. – Т. 28. – № 6. – С. 838–840.
6. Nath, S. Magneto-Thermoelastic Surface Waves in Micropolar Elastic Media /S. Nath, Sengupta P.R., Debnath L // Computers Math. Applic. – 1998. – Vol. 35. – № 3. – P.– 47–55.

Получено 31.08.2006