

Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси
Ўзбекистон Республикаси Фан ва Техника
Давлат комитети
Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси
Самарқанд бўлими

М.Т.Ўрозбоев номидаги Механика ва иншоотлар
сейсмик мустаҳкамлиги институти

Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси
Самарқанд Бўлимининг Худудий муаммолар
комплекси илмий-тадқиқот институти

МЕХАНИКАНИНГ ҲОЗИРГИ ЗАМОН МУАММОЛАРИ

Республика илмий – техникавий конференцияси

МАЪРУЗАЛАР ВА ТЕЗИСЛАР

29–31 октябр 2001 йил

Тошкент–Самарқанд

ДОКЛАДЫ И ТЕЗИСЫ

Республиканской научно-технической конференции

“СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ”

29–31 октября, 2001 года

Ташкент–Самарқанд

Тошкент – 2001

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ УПРУГИХ ЗАДАЧ В РАМКАХ КОНТИНУУМА КОССЕРА

Кулеш М.А., Шардаков И.Н. (Пермь)

Направленность данной работы - построение и анализ решений двумерных статических краевых задач в рамках несимметричной теории упругости. Направленность анализа - определение возможных схем экспериментов и установление таких экспериментально измеряемых макровеличин, которые бы откликнулись на "моментное" поведение упругих материалов.

В работе рассматривается среда Коссера [1,2], уравнения равновесия такой среды имеют вид:

$$\begin{aligned}(2\mu + \lambda)\text{grad div } \bar{u} - (\mu + \alpha)\text{rot rot } \bar{u} + 2\alpha \text{rot } \bar{\omega} + \bar{X} &= \bar{0} \\ (2\gamma + \beta)\text{grad div } \bar{\omega} - (\gamma + \varepsilon)\text{rot rot } \bar{\omega} + 2\alpha \text{rot } \bar{u} - 4\alpha\bar{\omega} + \bar{Y} &= \bar{0}\end{aligned}\quad (1)$$

В приведенных выше уравнениях: \bar{X} - вектор массовых сил, \bar{Y} - вектор массовых моментов, \bar{u} - вектор перемещения, $\bar{\omega}$ - вектор поворота, μ, λ - постоянные Ламе, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ - физические постоянные материала в рамках несимметричной теории упругости. Дополнительно авторами вводятся три новых безразмерных комплекса, один из которых зависит от характерного геометрического размера l :

$$A = l \sqrt{\frac{\alpha\mu}{(\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon)}}, \quad B = \frac{\alpha + \mu}{\alpha}, \quad C = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}$$

Данная работа посвящена отысканию точных аналитических решений в рамках среды (1) для тел вращения. Предполагается, что напряженно-деформированное состояние

этих тел в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) зависит только от координат ρ и φ :

$$u(\rho, \varphi) = \{u_\rho(\rho, \varphi), u_\varphi(\rho, \varphi), 0\}, \quad \omega(\rho, \varphi) = \{0, 0, \omega_z(\rho, \varphi)\}.$$

Данный класс задач характеризуется тем, что решение для него можно представить в виде отрезка ряда Фурье:

$$\begin{aligned} u_\rho(\rho, \varphi) &= U^{(0)}(\rho) + U^{(1)}(\rho) \cos(\varphi) + \sum_{n=2}^N U^{(n)}(\rho) \cos(n\varphi) \\ u_\varphi(\rho, \varphi) &= V^{(0)}(\rho) + V^{(1)}(\rho) \sin(\varphi) + \sum_{n=2}^N V^{(n)}(\rho) \sin(n\varphi) \\ \omega_z(\rho, \varphi) &= \omega^{(0)}(\rho) + \omega^{(1)}(\rho) \sin(\varphi) + \sum_{n=2}^N \omega^{(n)}(\rho) \sin(n\varphi) \end{aligned} \quad (2)$$

Предлагается подход к построению точного аналитического решения этой задачи.

Полученное с помощью этого подхода решение можно представить в виде:

$$\begin{aligned} U^{(0)}(\rho) &= C_1^{(0)} \rho + \frac{C_2^{(0)}}{\rho} \\ V^{(0)}(\rho) &= C_3^{(0)} \rho + \frac{C_4^{(0)}}{\rho} - C_5^{(0)} \frac{I_1(2A\rho)}{2A^2} - C_6^{(0)} \frac{K_1(2A\rho)}{2A^2} \\ \omega^{(0)}(\rho) &= C_3^{(0)} - C_5^{(0)} \frac{BI_0(2A\rho)}{2A} + C_6^{(0)} \frac{BK_0(2A\rho)}{2A} \end{aligned} \quad (3)$$

$$U^{(1)}(\rho) = C_1^{(1)} + \frac{C_2^{(1)}}{\rho} + C_3^{(1)} \rho^2 + C_4^{(1)} \ln(\rho) + C_5^{(1)} \frac{I_1(2A\rho)}{\rho} + C_6^{(1)} \frac{K_1(2A\rho)}{\rho}$$

$$V^{(1)}(\rho) = -C_1^{(1)} + \frac{C_2^{(1)}}{\rho^2} + C_3^{(1)} \frac{3\lambda + 5\mu}{\mu - \lambda} \rho^2 - C_4^{(1)} \left\{ \ln(\rho) + \frac{\lambda + \mu}{3\mu + \lambda} \right\} + C_5^{(1)} \left\{ \frac{I_1(2A\rho)}{\rho} - 2AI_0(2A\rho) \right\} - C_6^{(1)} \left\{ \frac{K_1(2A\rho)}{\rho} + 2AK_0(2A\rho) \right\} \quad (4)$$

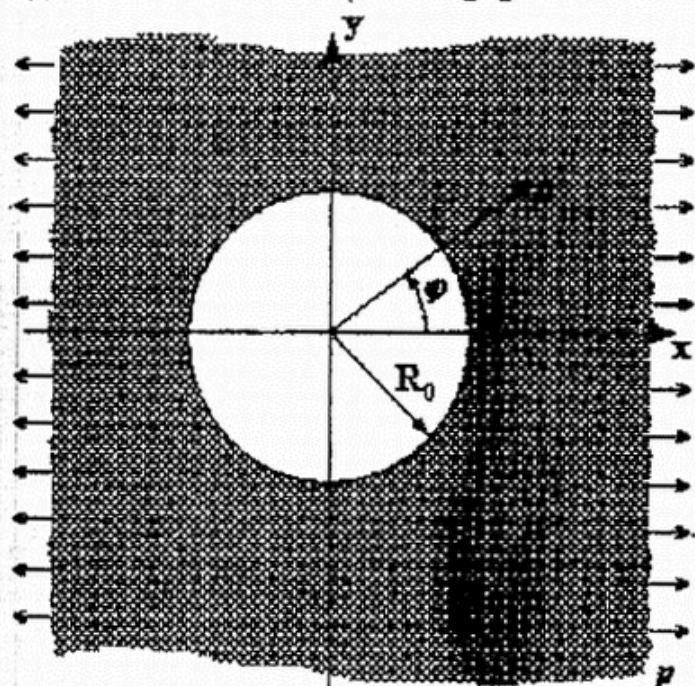
$$\omega^{(1)}(\rho) = C_3^{(1)} \frac{4\lambda + 8\mu}{\mu - \lambda} \rho - C_4^{(1)} \frac{\lambda + 2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} - C_5^{(1)} 2A^2 BI_1(2A\rho) - C_6^{(1)} 2A^2 BK_1(2A\rho)$$

$$U^{(n)}(\rho) = \frac{C_1^{(n)}}{\rho^{(n+1)}} + \frac{C_2^{(n)}}{\rho^{(n-1)}} + C_3^{(n)} \rho^{(n-1)} + C_4^{(n)} \rho^{(n+1)} + \frac{C_5^{(n)}}{\rho} I_n(2A\rho) + \frac{C_6^{(n)}}{\rho} K_n(2A\rho)$$

$$V^{(n)}(\rho) = \frac{C_1^{(n)}}{\rho^{(n+1)}} + \frac{C_2^{(n)}}{\rho^{(n-1)}} \frac{\lambda(n-2) + \mu(n-4)}{\lambda n + \mu(n+2)} - C_3^{(n)} \rho^{(n-1)} - C_4^{(n)} \frac{\lambda(n+2) + \mu(n+4)}{\lambda n + \mu(n-2)} \rho^{(n+1)} + C_5^{(n)} \left(\frac{1}{\rho} I_n(2A\rho) - \frac{2A}{n} I_{n-1}(2A\rho) \right) + C_6^{(n)} \left(\frac{1}{\rho} K_n(2A\rho) + \frac{2A}{n} K_{n-1}(2A\rho) \right) \quad (5)$$

$$\omega^{(n)}(\rho) = \frac{C_2^{(n)}}{\rho^n} \frac{\lambda(2n-2) + \mu(4n-4)}{\lambda n + \mu(n+2)} - C_4^{(n)} \frac{\lambda(2n+2) + \mu(4n+4)}{\lambda n + \mu(n-2)} \rho^n - C_5^{(n)} \frac{2A^2 B}{n} I_n(2A\rho) - C_6^{(n)} \frac{2A^2 B}{n} K_n(2A\rho)$$

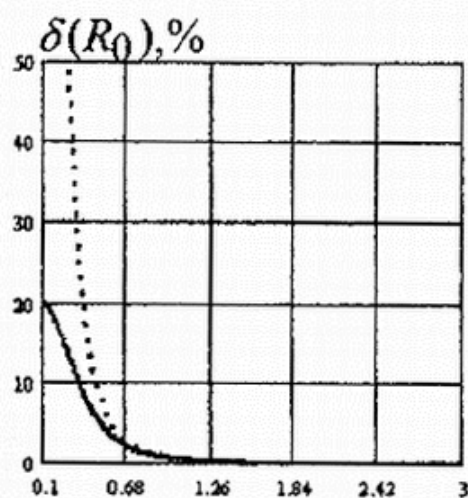
Здесь $I_n(\rho)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода, $K_n(\rho)$ - модифицированная функция Бесселя второго рода, или функция Макдональда [3].



В частном случае получено решение задачи Кирша об одностороннем растяжении пластины, ослабленной круговым отверстием. Края кругового отверстия свободны от внешних напряжений, а на бесконечности действует растягивающее усилие постоянной интенсивности p в направлении оси Ox . Решение этой задачи получится, если в рядах (2)

удержать слагаемые при $n = 0$ и $n = 2$.

Можно ввести экспериментально измеряемую макровеличину D , которая характеризует степень искажения кругового отверстия, а также относительный параметр δ , характеризующий степень отличия "моментного" решения от классического:



$$D = \left| \frac{u_\rho(R_0, 0)}{u_\rho(R_0, \pi/2)} \right| \quad (6)$$

$$\delta = \left| \frac{D - D^*}{D^*} \right| \cdot 100\%$$

Сплошной линией обозначен график, соответствующий среде Коссера, точечной - среде псевдокоссера. Видно, что влияние

"моментного" описания поведения материала на величину δ значительно усиливается по мере уменьшения характерного геометрического размера (радиуса кругового отверстия R_0). Это объясняется тем, что безразмерное "моментное" решение зависит от характерного размера, а классическое не зависит и позволяет предполагать, что этот эффект может быть зафиксирован экспериментально.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 99-01-00240 и 01-01-06001).

Литература

1. Новаций В. Теория упругости. Пер. с польск. Победря Б.Е. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. Schaefer H. Das Cosserat-Kontinuum. // ZAMM. 1967. V.47. No. 8. P. 485-498
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1971. - 576 с.