

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

На правах рукописи

Кулеш Михаил Александрович

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКИХ
РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ
СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НЕСИММЕТРИЧНОЙ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

01.02.04 — механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Шардаков И.Н.

Пермь 2001

Оглавление

Введение	4
1. Основные уравнения несимметричной теории упругости	18
1.1. Тензор моментных напряжений	19
1.2. Вывод уравнений равновесия и движения для напряжений и моментных напряжений	19
1.3. Геометрические соотношения	21
1.4. Физические уравнения	23
1.5. Уравнения движения для векторов перемещения и поворота	25
1.6. Среда псевдокоссера	27
1.7. Частный случай: декартовая система координат	28
1.8. Частный случай: цилиндрическая система координат	29
2. Задача о сдвиговом деформировании слоя (пластины)	32
2.1. Решение в рамках среды Коссера	33
2.2. Решение в рамках среды псевдокоссера	36
3. Задача о кручении плоского кольца	37
3.1. Решение в рамках среды Коссера	38
3.2. Решение в рамках среды псевдокоссера	44

4. Задача о деформировании плоского кольца	45
4.1. Решение в рамках среды Коссера	47
4.2. Решение в рамках среды псевдокоссера	55
5. Задача Кирша о растяжении бесконечной плоскости, ослабленной круговым отверстием	56
5.1. Решение в рамках среды Коссера	58
5.2. Решение в рамках среды псевдокоссера	68
6. Построение точного аналитического решения для те- ла вращения в рамках среды Коссера	70
7. Анализ решений	80
8. Выводы по работе	90
Литература	92

Введение

Задачи о деформировании материала, при котором деформация среды описывается не только вектором перемещения \vec{u} , но также вектором поворота $\vec{\omega}$, давно привлекают внимание исследователей. Среду, моделируемую таким образом, сегодня часто называют средой Коссера, а за теорией в литературе закрепились названия моментной, несимметричной, а также микроструктурной теории упругости.

В этих моделях, в отличие от классической теории, напряжённое состояние описывается несимметричным тензором напряжений, поэтому упругие тела в несимметричной теории характеризуются большим числом упругих констант. Необходимость подобного усложнения нередко оправдывают тем, что с помощью даваемых в классической теории упругих (и пьезоэлектрических) констант невозможны трактовки, например, аномального пьезоэффекта в кварце, дисперсии упругих волн в сплошной среде, а также упругих свойств кварца, алмаза, дигидрофосфата аммония и других кристаллов [2].

Потеря точности в классической механике континуума может происходить по следующей причине. Если ищется реакция тела на внешнее физическое воздействие, характерный размер которого соизмерим со средним размером зерна или молекулы в теле, то зернистые или молекулярные составляющие тела возбуждаются индивидуально. В этом случае должны приниматься во внимание внутренние движения составляющих. Это становится особенно ярко выражено

в связи с распространением волн с большими частотами или с малыми длинами волн.

Истоки микроструктурных теорий восходят к трудам В.Фойхта (W.Voigt [75]), который впервые рассмотрел модель среды с вращательным взаимодействием её частиц при изучении упругих свойств кристаллов.

Первая попытка построения теории упругости с несимметричным тензором напряжений принадлежит, по-видимому, братьям Коссера (E.Cosserat, F.Cosserat, [50]). Согласно концепции братьев Коссера, учитывающей вращательное взаимодействие частиц материала, при изучении напряжённого состояния твёрдого деформируемого континуума необходимо наряду с обычными напряжениями (сила на единицу площади) вводить в рассмотрение моментные напряжения (момент силы на единицу площади).

Интерес к несимметричной теории упругости значительно возрос за последнее время и различные её аспекты стали предметом изучения многих авторов. Сегодня можно выделить несколько направлений развития несимметричной теории упругости, отличающихся способом описания поворота частиц:

- 1) Теория среды со "стестнённым вращением". Такую среду часто называют псевдоупругой средой Коссера или средой псевдокоссера. В англоязычной литературе для обозначения этой теории используется термин "Couple stress elasticity".

Описание основных положений данной теории можно найти в работах Э.Л.Аэро и Е.В.Кувшинского [1], Р.Д.Миндлина (R.D.Mindlin [65]), Р.Д.Миндлина и Г.Ф.Тирстена (R.D.Mindlin and H.F.Tierstin [66]), Ю.Н.Немиша ([31]-[33]), В.Т.Койтера (W.T. Koiter [61]), Н.Ф.Морозова ([27], [28]) Г.Н.Савина ([41], [42]), А.И.Каландии

[12] и др.

В теории среды псевдокоссера сохраняется концепция классической теории упругости, т.е. считается, что перемещения \vec{u} точек этой среды и их жёсткие малые повороты $\vec{\omega}$ связаны зависимостью

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{u}.$$

Таким образом, для среды псевдокоссера имеется одна независимая кинематическая неизвестная - перемещения \vec{u} и в рассмотрение вводятся несимметричные тензора напряжений $\tilde{\sigma}$ и моментных напряжений $\tilde{\mu}$. Причём [46] антисимметричная часть напряжения и симметричная часть моментного напряжения не определяются напрямую из физических уравнений, из-за чего А.К.Эринген называет теорию среды псевдокоссера теорией неопределённых моментных напряжений.

Этот вариант несимметричной теории понижает её полноту, так как число физических констант для изотропного упругого тела сокращается до четырёх. Например, часто используются E - модуль Юнга, γ - коэффициент Пуассона, l - постоянная, имеющая размерность длины и B - безразмерная постоянная, называемая модулем изгиба ([65], [27], [28], [42], [12], [47]).

Кроме этого, получаемая структура уравнений такова [35], что если, в частности, на поверхности упругого тела заданы перемещения, то не удастся произвольно задать нормальную составляющую вектора поворота.

Несмотря на эти недостатки, теория среды псевдокоссера хорошо развита. Предложено несколько общих теорем, методов интегрирования и дано решение ряда задач. Так, Миндлин и

Тирстен [66] обобщили представление Папковича-Нейбера для статических задач, а также получили фундаментальное решение в бесконечном упругом пространстве. Их теоретические выводы были проиллюстрированы несколькими примерами.

Боги и Стернберг (D.V.Bogy and E.Sternberg [48]) занимались задачей плоского деформированного состояния. Были обобщены решения Файлона и задача о штампе на континуум псевдокоссера. Особенно интересными являются следствия, касающиеся сингулярных решений для плоского деформированного состояния.

Можно отметить также решение задачи об изгибе кругового цилиндра [47], плоской граничной задачи о действии сосредоточенной силы на бесконечной плоскости с круговым отверстием [57], задачи для бесконечной упругой изотропной области, ослабленной конечным числом произвольно расположенных несоприкасающихся круговых отверстий [34], задачи о деформировании плоского кольца [59].

- 2) Теория среды Коссера. В англоязычной литературе используется термин "Cosserat (micropolar) elasticity". Эта теория была развита в 60-70-х годах независимо несколькими исследователями: В.Новацким (W.Nowacki [35]) и рядом его учеников, В.А.Пальмовым [36], Н. Schaefer [72], Э.Л.Аэро и Е.В.Кувшинским [2] и др.

В теории среды Коссера для описания перемещения частиц рассматриваемой среды наряду с обычным полем перемещений \vec{u} вводится кинематически независимое поле векторов $\vec{\omega}$, характеризующих малые повороты частиц. Таким образом, в этой теории присутствуют две независимых кинематических неиз-

вестных, а тензоры напряжений $\tilde{\sigma}$ и моментных напряжений $\tilde{\mu}$ являются несимметричными.

В этом варианте упругое поведение изотропной линейной среды характеризуется шестью упругими константами ([35], [36], [37]): две постоянные Лямэ и 4 новые константы, характеризующие микроструктуру. В случае квадратично-нелинейной среды количество новых констант увеличивается до 9 [9].

Во многих работах (напр. [37], [71], [70]) отмечается, что среда псевдокоссера является следствием среды Коссера при условии стремления одной из новых упругих констант к бесконечности.

Известны точные аналитические решения ряда задач для среды Коссера, несмотря на значительные трудности при разрешении получающихся дифференциальных уравнений равновесия или движения. Например, найдена концентрация напряжений вблизи кругового отверстия [37], решена задача о действии сосредоточенной силы и сосредоточенного момента в безграничном упругом пространстве ([71], [67]), задача о равновесии полупространства ([64], [51], [52]).

- 3) Континуум Леру (градиентная модель). К понятию моментных напряжений приводит и учёт зависимости энергии деформаций от высших градиентов вектора перемещений. Впервые на целесообразность учёта высших градиентов перемещений указал Леру [63]. Деформированное состояние при этом определяется двумя тензорами: тензором макродеформации второго порядка и градиентом микродисторсии третьего порядка. Градиент микродисторсии связан с вектором перемещений и не связан с вектором поворота. Следовательно, вращение частиц среды в этом случае является стеснённым [9]. Напряжённое состояние

определяется объёмной плотностью внутренней энергии, через которую вычисляются тензор напряжений и тензор третьего порядка "двойных напряжений", антисимметричная часть которого является тензором моментных напряжений $\tilde{\mu}$ [43].

В случае физической нелинейности в определяющие соотношения этой модели входят помимо констант Лямэ 7 констант Ландау, определяющих нелинейность и 2 новые константы, характеризующие микроструктуру [9]. Для линейной среды общее количество констант сокращается, как и в случае среды псевдокоссера, до 4-х.

- 4) Микроморфная среда Миндлина-Эрингена ("Microstructure (micromorphic) elasticity"). Данная теория развита Р.Д.Миндлиным в работе [68] и А.К.Эрингеном [46].

В качестве кинематических неизвестных в этой теории в общем случае принимаются вектор перемещения и несимметричный тензор микросмещений, деформированное состояние определяется тензором макродеформаций, характеризующим относительные перемещения центров масс макрообъёмов (он совпадает с тензором деформации Грина), тензором относительной дисторсии, характеризующим перемещения структурных элементов относительно центра масс макрообъёма и градиентом микродисторсии третьего порядка, характеризующим относительные перемещения структурных элементов одного и того же макрообъёма. Для описания напряжённого состояния вводятся тензоры напряжений первого и второго порядков и тензор моментных напряжений.

Меры деформаций микроморфной среды являются обобщением деформационных характеристик двух вышеназванных моделей

- континуума Коссера и континуума Леру.

В этой теории упругое поведение материала характеризуется 18 физическими постоянными. В работе [60] проведено некоторое упрощение этой теории, что допускает сокращение числа констант до 10 и простую трактовку оставшихся.

- 5) Прочие теории. Среди прочих хотелось бы выделить работу Э.Л.Аэро и Е.В.Кувшинского [2], где развита 45-константная теория. В работе [53] предлагается мультиполярная теория, количество физических констант которой определяется её степенью. Обобщение несимметричной теории на случай анизотропии было сделано Н. Neuber [70], где упругое поведение новой анизотропной (в самом общем случае анизотропии) среды будет характеризоваться 171 упругой постоянной.

Различные аспекты моделей несимметричной среды можно найти также в работах [3], [5], [11], [16], [17], [40], [44].

Известны обобщения несимметричной теории на случай термоупругости и больших деформаций. Также известны решения ряда динамических задач, например, систематическое изложение современной теории распространения и взаимодействия упругих волн в твердых телах с микроструктурой можно найти в работе В.И.Ерофеева [9]. Однако подробное рассмотрение этих вопросов выходит за рамки данной работы, которая ограничивается областью статического состояния плоских тел в рамках теории среды Коссера.

Трудность отыскания частных решений системы уравнений среды Коссера в перемещениях обусловлена тем, что каждая из шести искомого компонент векторов перемещения и поворота входит во все шесть уравнений. Хочется отметить несколько подходов, используемых для решения этой проблемы:

- 1) Большинство авторов при отыскании точных аналитических решений используют функции (потенциалы) напряжений Эри, аналогичные функциям Папковича-Нейбера [24] классической теории упругости. Данный метод используется как для среды псевдокоссера ([47], [48], [57], [59]), так и в теории среды Коссера ([37], [71], [67], [69]). При этом подходе достигается возможность использования хорошо известного "каталога" частных решений уравнения Лапласа.

Использование этого метода имеет свои сложности. Выбор функций напряжения неоднозначен, отдельно требуется исследование полноты системы функций, доказывается теорема о классе функций, к которым принадлежат функции напряжений [73].

Иногда вместо функций напряжений используются аналогичные им функции перемещений, позволяющие делать эффективные замены переменных в дифференциальных уравнениях равновесия относительно векторов перемещения и поворота [30], приводящие к "развязыванию" системы. Однако эта эффективность сохраняется только для декартовой системы координат, в криволинейной же системе за счёт свойств векторного лаплассиана уравнения по-прежнему остаются взаимозависимы [24].

- 2) Некоторые авторы успешно используют различные методы интегральных преобразований. Например, в работах [51] и [52] задача о равновесии полупространства решается методом интегрального преобразования Хенкеля. В работе [64] методом интегральных преобразований Фурье (с использованием аппарата обобщённых функций) для упругой полуплоскости построены фундаментальные решения второй основной задачи применительно к случаю, когда в произвольной точке границы заданы

сосредоточенные смещения или повороты.

- 3) Известны попытки построения решения в виде рядов. В работе [58] в полярных координатах построено решение уравнений несимметричной теории упругости, которое приводит к определению коэффициентов разложения по некоторой системе неортогональных функций. С использованием метода ортогонализации можно получить выражения, определяющие искомые коэффициенты в виде рядов. В работах [49], [7] точное аналитическое решение для кольцевой области представлены в виде разложений Фурье по периодическим функциям азимутального угла. В работе [56] решения для задачи о круговом включении в бесконечную плоскость строятся в виде бесконечного ряда по бесселевым функциям второго рода, а коэффициенты ряда вычисляются из удовлетворения граничным условиям.
- 4) Имеются работы (напр. [14]), где решения представляются в комплексном виде по аналогии с методом комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [29] классической теории упругости. Однако данный метод имеет серьёзное ограничение - он применим только для двумерных задач.

В рамках подхода несимметричной теории для среды Коссера получено множество результатов, более физически правдоподобных по сравнению с классической теорией упругости. Однако все эти решения носят лишь теоретический и качественный характер, в большинстве случаев они не могут претендовать на количественное сравнение с классической теорией из-за отсутствия значений материальных констант или параметров, определяющих вклад моментных составляющих. Скудность информации о материальных константах сред с микроструктурой является одним из основных факторов,

сдерживающих изучение моделей "моментных" сред [35]. А это, в свою очередь, препятствует внедрению таких моделей в практику расчётов динамических и прочностных характеристик композиционных и поликристаллических материалов.

В литературе удалось найти несколько свидетельств о реализации процедур идентификации моделей такого типа для нескольких конкретных материалов. Измерение констант упругости на основе статических экспериментов производилось в работе [54]. Более точные динамические (в частности, ультразвуковые) эксперименты использовались в работах: [10], [43], [45] для идентификации моделей Леру и среды псевдокоссера, [55], [8], [62], [38] для идентификации линейной среды Коссера и в [39] для нелинейной среды Коссера (для смеси).

Такое незначительное количество экспериментальных работ связано с тем, что для практического подтверждения теории среды Коссера необходимы экспериментальные исследования локальных характеристик напряжённо-деформированного состояния образцов материала в условиях нагружения с обязательным наличием градиентов напряжений.

Необходимым компонентом идентификации являются также решения (предпочтительно аналитические) краевых задач, соответствующих экспериментально реализуемым условиям нагружения образцов. Именно поэтому в данной работе внимание фокусируется на построении точных аналитических решений статических задач, которые являются, с точки зрения построения возможных схем экспериментальных исследований, достаточно актуальными.

Целью работы является построение точных аналитических решений некоторых одномерных и двумерных статических краевых задач в рамках среды Коссера; качественный и количественный ана-

лиз этих решений на предмет их сравнения с решениями аналогичных краевых задач для симметричной среды и среды псевдокоссе-ра; определение и анализ поведения экспериментально измеряемых макровеличин, несущих в себе эффекты "моментного" поведения материала.

Научная новизна работы состоит в том, что:

- 1) Получены и приведены решения нескольких задач в рамках теории среды Коссера:
 - а) Задача о сдвиге плоского бесконечного слоя (пластины), закреплённой по обоим краям под действием силы тяжести.
 - б) Задача о кручении жёстко закреплённого по внешнему контуру кольца за счёт поворота внутреннего контура на фиксированный угол.
 - в) Задача о деформировании жёстко закреплённого по внешнему контуру кольца за счёт сдвига внутреннего контура на фиксированную величину.
 - г) Задач Кирша об одноосном растяжении бесконечной пластины, ослабленной одним центральным круговым отверстием.
 - д) Задача о деформировании тела вращения, испытывающего воздействие осесимметричной (или неосесимметричной) нагрузки. Предполагается, что напряжённо-деформированное состояние такого тела в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) зависит только от координат ρ и φ . Данный класс задач характеризуется тем, что решение для него можно

представить в виде отрезка ряда Фурье:

$$\begin{aligned}\vec{u}(\rho, \varphi) &= \{u_\rho(\rho, \varphi), u_\varphi(\rho, \varphi), 0\}, \\ u_\rho(\rho, \varphi) &= U^{(0)}(\rho) + U^{(1)}(\rho) \cos(\varphi) + \sum_{n=2}^N U^{(n)}(\rho) \cos(n\varphi), \\ u_\varphi(\rho, \varphi) &= V^{(0)}(\rho) + V^{(1)}(\rho) \sin(\varphi) + \sum_{n=2}^N V^{(n)}(\rho) \sin(n\varphi), \\ \vec{\omega}(\rho, \varphi) &= \{0, 0, \omega_z(\rho, \varphi)\}, \\ \omega_z(\rho, \varphi) &= \omega^{(0)}(\rho) + \omega^{(1)}(\rho) \sin(\varphi) + \sum_{n=2}^N \omega^{(n)}(\rho) \sin(n\varphi).\end{aligned}$$

Решения всех вышеперечисленных задач являются точными, представлены в безразмерной форме с использованием функций Бесселя различных порядков. При построении решений использовался подход, не применявшийся ранее для решения подобного класса задач.

- 2) Анализ полученных решений позволил определить соответствующие макровеличины, несущие в себе информацию о "моментном" поведении материала. Особо необходимо отметить, что все эти макровеличины могут быть экспериментально измерены.
- 3) Приведён анализ степени "отклика" введённых макровеличин на "моментное" поведение материала в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задач.

Достоверность основных научных положений и результатов подтверждается точным характером полученных аналитических решений и сравнением этих решений в частном случае среды псевдокосера с ранее полученными результатами других авторов (напр., Р.Д.Миндлин, В.А.Пальмов).

Практическая значимость полученных результатов состоит в том, что они позволяют определить возможные схемы натуральных экспериментов для фиксации эффектов "моментного" поведения материала.

На защиту выносятся: точные аналитические решения указанных выше одномерных и двумерных краевых задач для несимметричной среды Коссера, а также подход к их получению, качественный и количественный анализ полученных решений, демонстрирующий отклик "моментного" поведения среды на внешние воздействия.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались на: VIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Пермь, 23-29 августа 2001 г.), V-ой Всероссийской школе-семинаре "Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа" (САМГОП-2000, Пермь, 24 июня - 1 июля 2000 г.), Областной конференции молодых учёных "Молодёжная наука Прикамья" (Пермь, 2000 г.), Научных семинарах ИМСС УрО РАН (2000 г.) и кафедры "Математическое моделирование систем и процессов" Пермского Государственного технического университета (2001 г.), Научно-практической конференции "Прикладные пакеты программ в инженерных расчётах" (ППП-99, Пермь, 23-24 ноября 1999 г.). Результаты работы освещены в 6 публикациях [18]-[23].

Структура работы. Кроме введения работа содержит семь глав и заключение.

В первой главе приведены основные положения теории сред Коссера и псевдокоссера - уравнения равновесия и движения относительно динамических характеристик поведения материала, геометрические и определяющие соотношения, уравнения равновесия и движения для векторов перемещения и поворота. Кроме этого, в данной главе взамен новых размерных физических констант материала среды Коссера авторами вводятся три безразмерных константы, которые в дальнейшем будут использоваться при записи точных решений.

В главах со второй по пятую изложены пути получения решений соответствующих краевых задач и выписан явный вид всех характеристик напряжённно-деформированного состояния в безразмерном виде с использованием функций Бесселя нулевого и первого порядков.

В шестой главе приведено обобщение решений краевых задач (гл. 3-5) на случай тела вращения, для которого напряжённно-деформированное состояние в цилиндрической системе координат зависит от радиальной и угловой координат и решение для него можно представить в виде отрезка ряда Фурье. Приведён явный вид для безразмерных кинематических характеристик \vec{u} и $\vec{\omega}$ также с использованием функций Бесселя нулевого и первого порядков.

В седьмой, заключительной главе приведены графические зависимости для решённых краевых задач, введены макропараметры, характеризующие проявление "моментного" эффекта и для них также построены графики.

Глава 1.

Основные уравнения несимметричной теории упругости

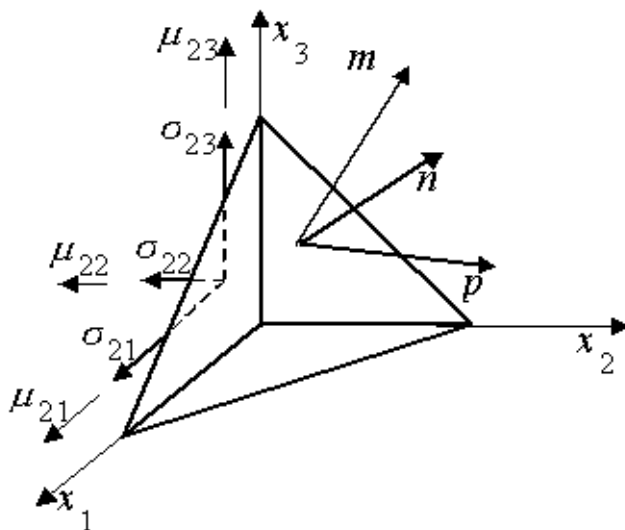


Рис. 1.1.

Приведём основные соотношения несимметричной теории упругости ([35], [72]). Рассмотрим произвольную область тела, ограниченную ортогональным трехгранником (рис. 1.1). Нагрузка извне передается посредством усилия p и момента m , действующих на гладкой поверхности A .

Каждая частица среды является малым абсолютно твердым телом и имеет ориентирование (полярная среда). Деформация такой среды описывается не только вектором перемещений \vec{u} , но также

вектором поворота $\vec{\omega}$ частицы, являющимися функциями координат и времени.

1.1. Тензор моментных напряжений Обозначим через $\vec{p}dA$ вектор сил, а через $\vec{m}dA$ - вектор моментов, действующих через поверхностный элемент dA с нормалью \vec{n} извне внутрь тела.

По аналогии с теоремой Коши для вектора поверхностной нагрузки можно сформулировать аналогичное утверждение и для вектора моментов: если $\vec{m}(\cdot, \vec{n})$ непрерывна по первому аргументу, то

$$\exists \tilde{\mu}(\cdot) : \forall \vec{r} \quad \vec{m}(\vec{r}, \vec{n}) = \vec{n} \cdot \tilde{\mu}(\vec{r}).$$

Таким образом, для рассматриваемой частицы помимо тензора напряжений $\tilde{\sigma}$ вводится также тензор моментных напряжений $\tilde{\mu}$, который является дополнительной независимой характеристикой напряжённого состояния:

$$\vec{p} = \vec{n} \cdot \tilde{\sigma}, \quad \vec{m} = \vec{n} \cdot \tilde{\mu}. \quad (1.1)$$

Тензор $\tilde{\sigma}$ в общем случае несимметричен. Тензор $\tilde{\mu}$ является новой по отношению к классической теории упругости динамической характеристикой напряжённого состояния. Он также является несимметричным.

1.2. Вывод уравнений равновесия и движения для напряжений и моментных напряжений Обозначим через \vec{X} вектор массовых сил, \vec{Y} - вектор массовых моментов, а \vec{r} - радиус-вектор, отсчитываемый от некоторой точки тела. Тогда для произвольного объёма V тела уравнения равновесия запишем в виде:

$$\int_A \vec{p}dA + \int_V \vec{X}dV = 0, \quad (1.2)$$

$$\int_A (\vec{r} \times \vec{p} + \vec{m})dA + \int_V (\vec{r} \times \vec{X} + \vec{Y})dV = 0. \quad (1.3)$$

Используем соотношения (1.1), теорему Остроградского-Гаусса в виде

$$\int_A \vec{n} \cdot \vec{T} dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{T} dV \quad (1.4)$$

и соотношения для векторного произведения векторов [6]

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{E} \cdot \vec{a}.$$

Тогда соотношения (1.2) и (1.3) преобразуются к виду:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} + \vec{X}) dV = 0, \quad (1.5)$$

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot (\tilde{\sigma} \cdot \vec{E} \cdot \vec{r}) + \vec{\nabla} \cdot \tilde{\mu} + \vec{X} \cdot \vec{E} \cdot \vec{r} + \vec{Y}) dV = 0. \quad (1.6)$$

Далее, пользуясь правилом дивергенции произведения тензорзначных функций [6]

$$\vec{\nabla} \cdot (\tilde{A} \cdot \tilde{B}) = \tilde{B}^T \cdot (\vec{\nabla} \cdot \tilde{A}) + \tilde{A}^T : \vec{\nabla} \tilde{B},$$

первое слагаемое в уравнении (1.6) перепишем следующим образом:

$$\vec{\nabla} \cdot ((\tilde{\sigma} \cdot \vec{E}) \cdot \vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (\tilde{\sigma} \cdot \vec{E}) \cdot \vec{r} + \tilde{\sigma}^T : \vec{E}.$$

Таким образом, уравнение (1.6) примет вид:

$$\int_V ((\vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} + \vec{X}) \cdot \vec{E} \cdot \vec{r} + \tilde{\sigma}^T : \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \tilde{\mu} + \vec{Y}) dV = 0.$$

Используя уравнение (1.5) и учитывая тот факт, что объём V был выбран произвольно, получим окончательный вид уравнений равновесия:

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} + \vec{X} = 0, \quad (1.7)$$

$$\tilde{\sigma}^T : \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \tilde{\mu} + \vec{Y} = 0. \quad (1.8)$$

В случае динамических задач следует в силу принципа Д'Аламбера добавить инерционные члены:

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} + \vec{X} = \rho \ddot{\vec{u}}, \quad (1.9)$$

$$\tilde{\sigma}^T : \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \tilde{\mu} + \vec{Y} = j \ddot{\vec{\omega}}, \quad (1.10)$$

где ρ - плотность, j - инерционная характеристика размерности плотности момента инерции.

Символом $\vec{\tilde{E}}$ здесь обозначен тензор Леви-Чивиты третьего ранга [6], компоненты которого определяются следующим образом: $E_{ijk} = 1$, если i, j, k образуют чётную перестановку индексов, $E_{ijk} = -1$, если нечётную и 0, если среди i, j, k есть одинаковые значения.

Из соотношения (1.8) видно, что тензор напряжений $\tilde{\sigma}$ будет симметричен только при отсутствии моментных напряжений $\tilde{\mu}$ и массовых моментов \vec{Y} . В этом случае (1.8) сводится к виду $\tilde{\sigma}^T : \vec{\tilde{E}} = 0$, что обеспечивает в теории симметричной упругости симметрию тензора $\tilde{\sigma}$.

1.3. Геометрические соотношения Геометрические соотношения получим из закона сохранения энергии, применённого к объёму V , ограниченному поверхностью A :

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\rho \dot{u}^2}{2} + \frac{j \dot{\omega}^2}{2} + U \right) dV = \int_V (\vec{X} \cdot \dot{u} + \vec{Y} \cdot \dot{\omega}) dV + \int_A (\vec{p} \cdot \dot{u} + \vec{m} \cdot \dot{\omega}) dA.$$

Член в левой части уравнения представляет возрастание кинетической и внутренней энергии. Первый член в правой части представляет мощность массовых сил и моментов, а второй - поверхностных. Дифференцируя левую часть по времени, используя соотношения (1.1) и теорему Остроградского-Гаусса (1.4), перепишем это соотношение в виде:

$$\int_V (\rho \dot{u} \cdot \ddot{u} + j \dot{\omega} \cdot \ddot{\omega} + \dot{U} - \vec{X} \cdot \dot{u} - \vec{Y} \cdot \dot{\omega} - \vec{\nabla} \cdot (\tilde{\sigma} \cdot \dot{u}) - \vec{\nabla} \cdot (\tilde{\mu} \cdot \dot{\omega})) dV = 0.$$

В силу произвольности выбранного объёма получим:

$$\dot{U} + (\rho \ddot{u} - \vec{X}) \cdot \dot{u} + (j \ddot{\omega} - \vec{Y}) \cdot \dot{\omega} - \vec{\nabla} \cdot (\tilde{\sigma} \cdot \dot{u}) - \vec{\nabla} \cdot (\tilde{\mu} \cdot \dot{\omega}) = 0.$$

Используя уравнения движения (1.9), (1.10) и правило дивергенции произведения векторзначной и тензорзначной функций [6]

$$\vec{\nabla} \cdot (\tilde{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{\nabla} \cdot \tilde{A}) \cdot \vec{B} + \tilde{A} : \vec{\nabla} \vec{B}^T,$$

получим закон изменения внутренней энергии:

$$\dot{U} = \tilde{\sigma} : (\vec{\nabla} \dot{u} - \vec{E} \cdot \dot{\vec{\omega}})^T + \tilde{\mu} : (\vec{\nabla} \dot{\vec{\omega}})^T. \quad (1.11)$$

Для изотермических процессов внутренняя энергия совпадает со свободной энергией Гельмгольца ($F = U - ST$), которая, в свою очередь, является функцией независимых кинематических переменных $\tilde{\gamma}$ - тензора деформаций и $\tilde{\chi}$ - тензора изгиба-кручения, то есть $F = F(\tilde{\gamma}, \tilde{\chi})$. Поэтому (1.11) можем переписать в следующем виде:

$$\dot{U} = \dot{F}(\tilde{\gamma}, \tilde{\chi}) = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\gamma}} \dot{\tilde{\gamma}}^T + \frac{\partial F}{\partial \tilde{\chi}} \dot{\tilde{\chi}}^T = \tilde{\sigma} : \dot{\tilde{\gamma}}^T + \tilde{\mu} : \dot{\tilde{\chi}}^T. \quad (1.12)$$

Отсюда получаем геометрические соотношения:

$$\tilde{\gamma} = \vec{\nabla} \vec{u} - \vec{E} \cdot \vec{\omega}, \quad (1.13)$$

$$\tilde{\chi} = \vec{\nabla} \vec{\omega}. \quad (1.14)$$

Отметим, что, в отличие от классической теории, тензор деформации (1.13) является несимметричным. Кроме этого, тензор (1.14) характеризует возникающие в теле изгибы и кручения и также является несимметричным.

Симметричная часть тензора деформаций $\tilde{\gamma}$ идентична тензору деформаций классической теории:

$$\tilde{\gamma}^{(S)} = \vec{\nabla} \vec{u} = \tilde{\varepsilon}.$$

Несимметричная часть характеризует отличие вектора поворота $\vec{\omega}$ от вектора вихря перемещения (1.21) и описывает поворот ортогонального трехгранника относительно вектора вихря:

$$\tilde{\gamma}^{(A)} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} - \vec{E} \cdot \vec{\omega}.$$

Три компоненты тензора изгиба-кручения $\tilde{\chi}$, имеющие одинаковые индексы, описывают крутильные деформации, а оставшиеся компоненты с разными индексами - изгибные.

1.4. Физические уравнения Из соотношения (1.12) получаем связь тензоров напряжения и моментного напряжения со свободной энергией Гельмгольца:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\gamma}}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\chi}}.$$

Различные авторы по-разному выбирают вид функции F . Мы будем пользоваться разложением, предложенным в [35]. Следуя этой работе, разложим свободную энергию в окрестности естественного состояния ($\tilde{\gamma} = 0, \tilde{\chi} = 0$) в ряд Тейлора, пренебрегая величинами выше второго порядка. Из составляющих тензора $\tilde{\gamma}$ можно сконструировать только три независимых квадратичных инварианта, а именно $\gamma_{ij}\gamma_{ij}, \gamma_{ij}\gamma_{ji}, \gamma_{ii}\gamma_{jj}$. Аналогично для тензора изгиба-кручения. Поэтому для изотропного однородного и центрально-симметричного (не меняющегося при поворотах) тела получим разложение следующего вида:

$$F = \frac{\mu + \alpha}{2} \gamma_{ij}\gamma_{ij} + \frac{\mu - \alpha}{2} \gamma_{ij}\gamma_{ji} + \frac{\lambda}{2} \gamma_{ii}\gamma_{jj} + \\ + \frac{\gamma + \varepsilon}{2} \chi_{ij}\chi_{ij} + \frac{\gamma - \varepsilon}{2} \chi_{ij}\chi_{ji} + \frac{\beta}{2} \chi_{ii}\chi_{jj}.$$

Отсюда получаем определяющие уравнения:

$$\tilde{\sigma} = (\mu + \alpha)\tilde{\gamma} + (\mu - \alpha)\tilde{\gamma}^T + \lambda I_1(\tilde{\gamma})\tilde{e}, \quad (1.15)$$

$$\tilde{\mu} = (\gamma + \varepsilon)\tilde{\chi} + (\gamma - \varepsilon)\tilde{\chi}^T + \beta I_1(\tilde{\chi})\tilde{e}. \quad (1.16)$$

В них μ, λ - постоянные Ляме; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ - физические постоянные материала в рамках среды Коссера несимметричной теории упругости. Эти величины относятся к изотермическому состоянию.

В работе [54], используя условия положительности внутренней энергии, установлены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} 3\lambda + 2\mu + \alpha &\geq 0, & 2\mu + \alpha &\geq 0, & \alpha &\geq 0, \\ 3\beta + 2\gamma &\geq 0, & |\gamma - \varepsilon| &\leq \gamma + \varepsilon, & \gamma + \varepsilon &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

В данной работе получены точные аналитические решения ряда плоских задач. Приведение этих решений к безразмерному виду позволило ввести три безразмерных величины, одна из которых зависит от характерного геометрического размера l исследуемой области (например, для круглой шайбы в одной из рассмотренных далее задач это может быть радиус внешнего контура, по отношению к которому проводится обезразмеривание величин размерности длины):

$$A = l \sqrt{\frac{\alpha\mu}{(\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon)}}, \quad B = \frac{\alpha + \mu}{\alpha}, \quad C = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}. \quad (1.18)$$

Физический комплекс, аналогичный A , можно найти также в работе [71], где найдено точное аналитическое решение задачи о действии сосредоточенной силы и сосредоточенного момента в безграничном упругом пространстве.

Используя (1.17), несложно выписать неравенства, ограничивающие значения данных величин:

$$A > 0, \quad B \geq 1, \quad |C| \leq 1.$$

В работе [62] вводятся так называемые технические константы: G - модуль сдвига; ν - коэффициент Пуассона; l_t - характерный размер кручения; l_b - характерный размер изгиба; N - порядок несимметрии; Ψ - полярный коэффициент. Константы, приведённые в (1.15)-(1.16), связаны с техническими константами следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2G\nu}{1-2\nu}, & \mu &= G, & \alpha &= \frac{GN^2}{1-N^2}, \\ \gamma &= Gl_t^2, & \varepsilon &= G(4l_b^2 - l_t^2), & \beta &= 2Gl_t^2\left(\frac{1}{\Psi} - 1\right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

В той же работе приведены экспериментальные значения технических констант для четырёх различных материалов.

Таблица 1

Экспериментальные значения технических констант [62]

Материал	ρ, \bar{z}	$G, \text{МПа}$	ν	$l_t, \text{мм}$	$l_b, \text{мм}$	N	Ψ
Синтетический полиуретан	0.59	1033	0.335	0.063	0.032	0.316	1.5
Плотный пени- стый полиуретан	0.34	104	0.4	0.62	0.33	0.2	1.5
Твёрдая челове- ческая кость	2.0	4000	0.46	0.22	0.45	≥ 0.5	—
Пена низкой плотности	—	0.6	0.07	3.8	5.0	0.3	—

1.5. Уравнения движения для векторов перемещения и поворота Уравнения движения для перемещений получим, подставляя в (1.9) определяющие соотношения (1.15) и кинетические (1.13):

$$(\mu + \alpha)\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\vec{u} - \vec{\tilde{E}} \cdot \vec{\omega}) + (\mu - \alpha)\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\vec{u}^T - (\vec{\tilde{E}} \cdot \vec{\omega})^T) + \\ + \lambda\vec{\nabla} \cdot (I_1(\vec{\nabla}\vec{u} - \vec{\tilde{E}} \cdot \vec{\omega})\tilde{e}) + \vec{X} = \rho\ddot{\vec{u}}.$$

Аналогично поступаем со вторым уравнением. Подставим в (1.10) определяющие соотношения (1.16) и кинетические (1.14):

$$\tilde{\sigma}^T : \vec{\tilde{E}} + (\gamma + \varepsilon)\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\vec{\omega}) + (\gamma - \varepsilon)\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\vec{\omega}^T) + \\ + \beta\vec{\nabla} \cdot (I_1(\vec{\nabla}\vec{\omega})\tilde{e}) + \vec{Y} = j\ddot{\vec{\omega}}.$$

Легко показать несложные вспомогательные соотношения:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (I_1(\vec{\nabla}\vec{u} - \vec{E} \cdot \vec{\omega})\vec{e}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}), \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\vec{u}^T) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}), \\
(\vec{E} \cdot \vec{\omega})^T &= -\vec{E} \cdot \vec{\omega}, \\
\vec{E} \cdot \vec{\omega} : \vec{E} &= -2\vec{\omega}, \\
\vec{\nabla}\vec{u}^T : \vec{E} &= -rot \vec{u}, \\
\tilde{\sigma}^T : \vec{E} &= 2\alpha rot \vec{u} - 4\alpha\vec{\omega}.
\end{aligned}$$

Кроме этого, для лапласиана справедливо соотношение $\Delta\vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - rot rot \vec{u}$.

Используя его, окончательно получим уравнения движений для перемещений и поворотов:

$$\begin{aligned}
(2\mu + \lambda)grad div \vec{u} - (\mu + \alpha)rot rot \vec{u} + 2\alpha rot \vec{\omega} + \vec{X} &= \rho\ddot{\vec{u}}, \\
(\beta + 2\gamma)grad div \vec{\omega} - (\gamma + \varepsilon)rot rot \vec{\omega} + 2\alpha rot \vec{u} - 4\alpha\vec{\omega} + \vec{Y} &= j\ddot{\vec{\omega}}.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

В приведённых выше уравнениях:

\vec{E} - тензор Леви-Чивиты третьего ранга,

$(\cdot)^{(S)}$ - операция симметрирования,

$(\cdot)^{(A)}$ - операция альтернирования,

$\vec{\nabla}(\cdot)$ - набла-оператор,

$I_1(\cdot)$ - первый инвариант тензора [24],

\vec{X} - вектор массовых сил $[\vec{X}] = \underline{\mathfrak{z}}$,

\vec{Y} - вектор массовых моментов $[\vec{Y}] = \underline{\mathfrak{z}}$,

\vec{u} - вектор перемещения $[\vec{u}] = \underline{\mathfrak{z}}$,

$\vec{\omega}$ - вектор поворота $[\vec{\omega}] = \underline{\mathfrak{z}}$,

$\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\chi}$ - тензоры деформаций и изгиба-кручения,

$\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\mu}$ - тензоры напряжений и моментных напряжений,

μ, λ - постоянные Ляме $[\mu] = [\lambda] = \underline{\mathfrak{z}}$,

$\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ - физические постоянные материала в рамках среды Коссе-ра, $[\alpha] = \underline{\mathfrak{z}}$, $[\beta] = [\gamma] = [\varepsilon] = \underline{\mathfrak{z}}$,

ρ - плотность $[\rho] = \mathfrak{z}$,

j - инерционная характеристика размерности плотности момента инерции $[j] = \cdot$.

Существование и единственность решения данной системы уравнений показана, например, в [4] и [25].

1.6. Среда псевдокоссера Будем рассматривать также среду псевдокоссера, описываемую упрощенной теорией [35], в которой принято, что вектор поворота удовлетворяет соотношению

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}. \quad (1.21)$$

Физические соотношения среды псевдокоссера:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= 2\mu\tilde{\gamma}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\gamma})\tilde{e} - \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mu} \cdot \vec{E}, \\ \tilde{\mu} &= 2\gamma\tilde{\chi}^{(S)} + 2\varepsilon\tilde{\chi}^{(A)} + \beta I_1(\tilde{\chi})\tilde{e}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Для нахождения компонент тензоров деформаций и изгиба-кручения, как и для среды Коссера, используются соотношения (1.13) и (1.14). Однако, с учётом (1.22), уравнения равновесия для среды псевдокоссера примут иной вид, отличный от (1.20):

$$\mu\nabla^2 \vec{u} + (\mu + \lambda)\text{grad div } \vec{u} + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\text{rot rot } \nabla^2 \vec{u} + \vec{X} = \vec{0}. \quad (1.23)$$

Кроме констант Ляме λ и μ в уравнения в перемещениях входят две новые постоянные γ и ε . Среда псевдокоссера является следствием среды Коссера при условии $\alpha \rightarrow \infty$ ([37], [71], [70]).

К уравнениям в перемещениях (1.23) следует добавить граничные условия. Необходимо отметить, что структура уравнений в перемещениях не соответствует шести граничным условиям. Если на поверхности заданы перемещения, то не удастся независимо выразить нормальную составляющую вектора поворота. Мы имеем пять

кинематических граничных условий. Аналогично обстоит дело и с условиями в нагрузках. Данная проблема подробно обсуждена в работе [61].

1.7. Частный случай: декартовая система координат В уравнениях движения (1.20) содержатся дифференциальные операторы от векторов перемещения и поворота \vec{u} и $\vec{\omega}$. При решении уравнений в декартовой системе координат данные операторы вычисляются по следующим правилам [15]. Пусть задано векторное поле:

$$\vec{f}(x, y, z) = \{f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)\} = \{f_1, f_2, f_3\}.$$

Тогда:

- $grad \vec{f}$

$$\vec{\nabla} \vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} f_1 & \frac{d}{dx} f_2 & \frac{d}{dx} f_3 \\ \frac{d}{dy} f_1 & \frac{d}{dy} f_2 & \frac{d}{dy} f_3 \\ \frac{d}{dz} f_1 & \frac{d}{dz} f_2 & \frac{d}{dz} f_3 \end{bmatrix}; \quad (1.24)$$

- $grad div \vec{f}$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2} f_1 + \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} f_2 + \frac{d}{dx} \frac{d}{dz} f_3 \\ \frac{d}{dy} \frac{d}{dx} f_1 + \frac{d^2}{dy^2} f_2 + \frac{d}{dy} \frac{d}{dz} f_3 \\ \frac{d}{dz} \frac{d}{dx} f_1 + \frac{d}{dz} \frac{d}{dy} f_2 + \frac{d^2}{dz^2} f_3 \end{bmatrix}; \quad (1.25)$$

- $rot \vec{f}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dy} f_3 - \frac{d}{dz} f_2 \\ \frac{d}{dz} f_1 - \frac{d}{dx} f_3 \\ \frac{d}{dx} f_2 - \frac{d}{dy} f_1 \end{bmatrix}; \quad (1.26)$$

- $rot rot \vec{f}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} f_2 - \frac{d^2}{dy^2} f_1 - \frac{d^2}{dz^2} f_1 + \frac{d}{dx} \frac{d}{dz} f_3 \\ \frac{d}{dz} \frac{d}{dy} f_3 - \frac{d^2}{dz^2} f_2 - \frac{d^2}{dx^2} f_2 + \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} f_1 \\ \frac{d}{dx} \frac{d}{dz} f_1 - \frac{d^2}{dx^2} f_3 - \frac{d^2}{dy^2} f_3 + \frac{d}{dy} \frac{d}{dz} f_2 \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

1.8. Частный случай: цилиндрическая система координат

Декартова и цилиндрическая системы координат связаны соотношениями:

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi, \quad x_3 = z.$$

Пусть задано векторное поле:

$$\vec{f}(\rho, \varphi, z) = \{f_1(\rho, \varphi, z), f_2(\rho, \varphi, z), f_3(\rho, \varphi, z)\} = \{f_1, f_2, f_3\}.$$

В цилиндрической системе координат, как и в любой другой криволинейной системе, векторы базиса изменяются от точки к точке пространства, что требует использования ковариантных производных при вычислении дифференциальных операторов в уравнениях (1.20). Таким образом, в дальнейшем мы будем вычислять эти операторы по следующим правилам [15], [24]:

- $grad \vec{f}$

$$\vec{\nabla} \vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{d}{d\rho} f_1 & \frac{d}{d\rho} f_2 & \frac{d}{d\rho} f_3 \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\varphi} f_1 - \frac{f_2}{\rho} & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\varphi} f_2 + \frac{f_1}{\rho} & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\varphi} f_3 \\ \frac{d}{dz} f_1 & \frac{d}{dz} f_2 & \frac{d}{dz} f_3 \end{bmatrix}; \quad (1.28)$$

- $grad \operatorname{div} \vec{f}$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho^2} f_1 + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} f_1 + \frac{d^2}{d\rho^2} f_1 - \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\varphi} f_2 + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\varphi} \frac{d}{d\rho} f_2 + \frac{d}{dz} \frac{d}{d\rho} f_3 \\ \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\varphi} f_1 + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\varphi} \frac{d}{d\rho} f_1 + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} f_2 + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \frac{d}{d\varphi} f_3 \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} f_1 + \frac{d}{dz} \frac{d}{d\rho} f_1 + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \frac{d}{d\varphi} f_2 + \frac{d^2}{dz^2} f_3 \end{bmatrix}; \quad (1.29)$$

- $rot \vec{f}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\varphi} f_3 - \frac{d}{dz} f_2 \\ \frac{d}{dz} f_1 - \frac{d}{d\rho} f_3 \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{d}{d\rho} (\rho f_2) - \frac{d}{d\varphi} f_1 \right) \end{bmatrix}; \quad (1.30)$$

- rot rot \vec{f}

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} f_1 - \frac{d^2}{dz^2} f_1 + \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\varphi} f_2 + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\varphi} \frac{d}{d\rho} f_2 + \frac{d}{dz} \frac{d}{d\rho} f_3 \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{df_1}{d\rho} - \frac{df_2}{d\rho} + \frac{d}{dz} \frac{d}{d\varphi} f_3 \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\varphi} f_1 + \frac{f_2}{\rho^2} - \frac{d^2}{d\rho^2} f_2 - \frac{d^2}{dz^2} f_2 \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} f_1 + \frac{d}{dz} \frac{d}{d\rho} f_1 + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \frac{d}{d\varphi} f_2 - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} f_3 - \frac{d^2}{d\rho^2} f_3 - \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} f_3 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Рассмотрим плоское деформирование. Перемещения описываются вектором перемещений $\vec{u}(\rho, \varphi) = \{u_\rho(\rho, \varphi), u_\varphi(\rho, \varphi), 0\}$, а повороты частиц - вектором поворота $\vec{\omega}(\rho, \varphi) = \{0, 0, \omega_z(\rho, \varphi)\}$.

Воспользовавшись кинетическим соотношением (1.13) и соотношением для градиента вектора в цилиндрической системе координат (1.28), определим компоненты тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \gamma_{\rho\rho} &= \frac{d}{d\rho} u_\rho(\rho, \varphi), \\ \gamma_{\rho\varphi} &= \frac{d}{d\rho} u_\varphi(\rho, \varphi) - \omega_z(\rho, \varphi), \\ \gamma_{\varphi\rho} &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\varphi} u_\rho(\rho, \varphi) - \frac{u_\varphi(\rho, \varphi)}{\rho} + \omega_z(\rho, \varphi), \\ \gamma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\varphi} u_\varphi(\rho, \varphi) + \frac{u_\rho(\rho, \varphi)}{\rho}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Воспользовавшись определяющим соотношением (1.15), определим компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \frac{\lambda}{\rho} u_\rho(\rho, \varphi) + (2\mu + \lambda) \frac{d}{d\rho} u_\rho(\rho, \varphi) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{d}{d\varphi} u_\varphi(\rho, \varphi), \\ \sigma_{\rho\varphi} &= \frac{\mu - \alpha}{\rho} \left(\frac{d}{d\varphi} u_\rho(\rho, \varphi) - u_\varphi(\rho, \varphi) \right) + (\mu + \alpha) \frac{d}{d\rho} u_\varphi(\rho, \varphi) - \\ &\quad - 2\alpha\omega_z(\rho, \varphi), \\ \sigma_{\varphi\rho} &= \frac{\mu + \alpha}{\rho} \left(\frac{d}{d\varphi} u_\rho(\rho, \varphi) - u_\varphi(\rho, \varphi) \right) + (\mu - \alpha) \frac{d}{d\rho} u_\varphi(\rho, \varphi) + \\ &\quad + 2\alpha\omega_z(\rho, \varphi), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2\mu + \lambda}{\rho} u_\rho(\rho, \varphi) + \lambda \frac{d}{d\rho} u_\rho(\rho, \varphi) + \frac{2\mu + \lambda}{\rho} \frac{d}{d\varphi} u_\varphi(\rho, \varphi). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Воспользовавшись кинетическим соотношением (1.14) и соотношением для градиента вектора в цилиндрической системе координат

нат (1.28), определим компоненты тензора изгиба-кручения:

$$\begin{aligned}\chi_{\rho z} &= \frac{d}{d\rho}\omega_z(\rho, \varphi), \\ \chi_{\varphi z} &= \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\varphi}\omega_z(\rho, \varphi).\end{aligned}\tag{1.34}$$

Воспользовавшись определяющим соотношением (1.16), определим компоненты тензора моментных напряжений:

$$\begin{aligned}\mu_{\rho z} &= (\gamma + \varepsilon)\frac{d}{d\rho}\omega_z(\rho, \varphi), \\ \mu_{\varphi z} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{\rho}\frac{d}{d\varphi}\omega_z(\rho, \varphi), \\ \mu_{z\rho} &= (\gamma - \varepsilon)\frac{d}{d\rho}\omega_z(\rho, \varphi), \\ \mu_{z\varphi} &= \frac{\gamma - \varepsilon}{\rho}\frac{d}{d\varphi}\omega_z(\rho, \varphi).\end{aligned}\tag{1.35}$$

Соотношения (1.32)-(1.35) будут использованы в дальнейшем при нахождении характеристик напряжённо-деформированного состояния в цилиндрической системе координат для нескольких плоских задач.

Глава 2.

Задача о сдвиговом деформировании слоя (пластины)

Рассмотрим плоский бесконечный слой (пластину) шириной l , находящийся в равновесии в поле массовых сил интенсивности f , действующих вдоль оси Oy (рис. 2.1).

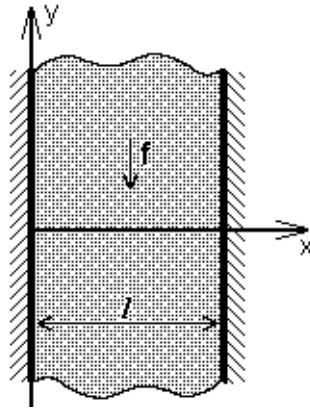


Рис. 2.1.

Используя (1.20), получим уравнения равновесия относительно векторов перемещения и поворота:

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - (\mu + \alpha) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \vec{\omega} + \vec{f} = 0, \quad (2.1)$$

$$(\beta + 2\gamma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\omega} + 2\alpha \operatorname{rot} \vec{u} - 4\alpha \vec{\omega} = 0.$$

Левая ($x = 0$) и правая ($x = l$) грани закреплены:

$$\vec{u}|_{x=0} = \vec{\omega}|_{x=0} = \vec{0}, \quad \vec{u}|_{x=l} = \vec{\omega}|_{x=l} = \vec{0}. \quad (2.2)$$

Вектор перемещения, соответствующий решению данной задачи в рамках симметричной теории упругости, вектор поворота, найденный из соотношения (1.21), а также отличные от нуля компоненты тензора напряжений в данном случае имеют вид:

$$\begin{aligned} u_y^*(x) &= \frac{fx}{2}(x-1), \\ \omega_z^*(x) &= \frac{f}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right), \\ \sigma_{xy}^*(x) &= \sigma_{yx}^*(x) = fx + C_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Известно [35], что частные решения соответствующих краевых задач симметричной теории упругости являются частными решениями для краевых задач несимметричной. Таким образом, задача состоит в отыскании дополнительных частных решений, описывающих "моментный" эффект поведения среды.

2.1. Решение в рамках среды Коссера Решение задачи будем искать в виде:

$$\vec{u} = \{0, V(x), 0\}, \quad \vec{\omega} = \{0, 0, \omega(x)\}. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.1), получим уравнения равновесия в виде системы двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $V(x)$ и $\omega(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}V(x) - \frac{2\alpha}{\alpha + \mu} \frac{d}{dx}\omega(x) &= \frac{f}{\alpha + \mu}, \\ \frac{d^2}{dx^2}\omega(x) - \frac{4\alpha}{\gamma + \varepsilon}\omega(x) + \frac{2\alpha}{\gamma + \varepsilon} \frac{d}{dx}V(x) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Таким образом, для решения данной задачи необходимо отыскать функции $V(x)$ и $\omega(x)$, удовлетворяющие уравнению (2.5) и граничным условиям (2.2).

Общее решение системы уравнений (2.5) имеет вид:

$$\begin{aligned} V(x) &= C_1V_1(x) + C_2V_2(x) + C_3V_3(x) + C_4V_4(x) + V_0(x), \\ \omega(x) &= C_1\omega_1(x) + C_2\omega_2(x) + C_3\omega_3(x) + C_4\omega_4(x) + \omega_0(x). \end{aligned}$$

где: $V_i(x), \omega_i(x), (i = 1, \dots, 4)$ - частные решения соответствующей однородной системы (2.5); $V_0(x), \omega_0(x)$ - частное решение неоднородной; C_i - произвольные постоянные, определяемые из краевых условий (2.2).

Как уже отмечалось, частные решения, стоящие при константах C_1 и C_2 , а также частное решение неоднородной системы соответствуют классической теории упругости, причём $\omega_1(x), \omega_2(x)$ удовлетворяют соотношению (1.21).

Для отыскания частных решений воспользуемся методом повышения порядка. Исключим переменную $V(x)$. Для этого продифференцируем уравнение (2.5.2), заменив в нём вторую производную по V значением, взятым из (2.5.1). Получим уравнение третьего порядка относительно $\omega(x)$:

$$\frac{d^3}{dx^3}\omega(x) - S^2 \frac{d}{dx}\omega(x) + \frac{fG}{2\mu} = 0. \quad (2.6)$$

В данном уравнении $S = 2\sqrt{G}$, $G = \frac{4\alpha\mu}{(\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon)}$.

Применим подстановку $\omega(x) = \omega(x) + \omega_0(x)$, где функция $\omega(x)$ должна удовлетворять однородному уравнению. Таким образом, получаем три функции, удовлетворяющие однородному уравнению (2.6) и являющиеся его частными решениями:

$$\omega_1(x) = 1, \quad \omega_2(x) = e^{-Sx}, \quad \omega_3(x) = e^{Sx}.$$

Общее решение уравнения (2.6) можно записать в следующем виде:

$$\omega(x) = C_2 + C_3 e^{-Sx} + C_4 e^{Sx} + \frac{f}{2\mu} x. \quad (2.7)$$

Дважды интегрируя данное соотношение с использованием (2.5.1), получим:

$$V(x) = C_1 + 2C_2 x - C_3 \frac{2\alpha}{S(\alpha + \mu)} e^{-Sx} + C_4 \frac{2\alpha}{S(\alpha + \mu)} e^{Sx} + \frac{f}{2\mu} x^2. \quad (2.8)$$

Соотношения (2.8) и (2.7) являются общими решениями системы (2.5), в чём можно легко убедиться непосредственной подстановкой.

С точки зрения удобства анализа получаемых решений все величины приведём к безразмерному виду. Пусть l - характерный геометрический размер, f - характерная массовая сила [3]. Обозначим символом $\hat{\cdot}$ размерные величины, которые связаны с безразмерными следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\hat{u}_i &= lu_i, & \hat{\sigma}_{ij} &= \mu\sigma_{ij}, & \hat{\mu}_{ij} &= l\mu\mu_{ij}, & \hat{\gamma}_{ij} &= \gamma_{ij}, & \hat{\chi}_{ij} &= \frac{1}{l}\chi_{ij}, \\ \hat{x} &= lx, & \hat{C}_0 &= lC_0, & \hat{C}_2 &= lC_2, & \hat{C}_3 &= lC_3.\end{aligned}$$

Используем также ранее введённые (1.18) безразмерные величины A, B, C . Тогда окончательный вид решения запишем в виде:

$$\begin{aligned}u_y(x) &= C_1 + C_2x + C_3e^{2Ax} + C_4e^{-2Ax} + \frac{f}{2}x^2, \\ \omega_z(x) &= \frac{C_2}{2} + C_3ABe^{2Ax} - C_4ABe^{-2Ax} + \frac{f}{2}x, \\ \gamma_{xy}(x) &= \frac{C_2}{2} - C_3A(B-2)e^{2Ax} + C_4A(B-2)e^{-2Ax} + \frac{f}{2}x, \\ \gamma_{yx}(x) &= \frac{C_2}{2} + C_3ABe^{2Ax} - C_4ABe^{-2Ax} + \frac{f}{2}x, \\ \chi_{xz}(x) &= 2C_3A^2Be^{2Ax} + 2C_4A^2Be^{-2Ax} + \frac{f}{2}, \\ \sigma_{xy}(x) &= fx + C_2, \\ \sigma_{yx}(x) &= fx + C_2 + 4C_3Ae^{2Ax} - 4C_4Ae^{-2Ax}, \\ \mu_{xz}(x) &= 2C_3e^{2Ax} + 2C_4e^{-2Ax} + \frac{f}{2A^2B}, \\ \mu_{zx}(x) &= C\mu_{xz}(x).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Компоненты тензора деформаций получены с использованием кинетического соотношения (1.13) и соотношения для градиента вектора в декартовой системе координат (1.24). Для отыскания компонент тензора напряжений использовано определяющее соотношение (1.15).

Компоненты тензора изгиба-кручения получены с использованием кинетического соотношения (1.14) и соотношения для градиента вектора в декартовой системе координат (1.24), а тензора момент-

ных напряжений - с использованием определяющего соотношения (1.16).

Граничные условия (2.2) для безразмерного решения (2.9) примут вид:

$$u_y(0) = 0, \quad \omega_z(0) = 0, \quad u_y(1) = 0, \quad \omega_z(1) = 0,$$

откуда получим систему линейных алгебраических уравнений, из которой определяются константы C_1, \dots, C_4 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & AB & -AB \\ 1 & 1 & e^{2A} & e^{-2A} \\ 0 & \frac{1}{2} & AB e^{2A} & -AB e^{-2A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{f}{2} \\ -\frac{f}{2} \end{bmatrix}.$$

2.2. Решение в рамках среды псевдокоссера Решение в рамках среды псевдокоссера с учётом (1.21) можно представить в виде:

$$\vec{u} = \{0, V(x), 0\}, \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}.$$

Подставляя данное представление вектора перемещения в (1.23), получим уравнение равновесия для среды псевдокоссера в виде дифференциального уравнения четвёртого порядка относительно функции $V(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{dx^4} V(x) - 4H \frac{d^2}{dx^2} V(x) + \frac{4fH}{\mu} &= 0, \\ H &= \frac{\mu}{\gamma + \varepsilon}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Решение уравнения (2.10), соответствующего среде псевдокоссера, также описывается соотношениями (2.9) при $B = 1$ (1.18), что соответствует предельной ситуации при $\alpha \rightarrow \infty$. Данное утверждение было проверено путём непосредственного решения вышеприведённого уравнения.

Глава 3.

Задача о кручении плоского кольца

Рассмотрим кольцо (цилиндр), жёстко закреплённое по внешнему контуру $\rho = R_1$ (рис. 3.1). Кручение кольца осуществляется за счёт поворота внутреннего контура $\rho = R_0$ на угол φ_0 .

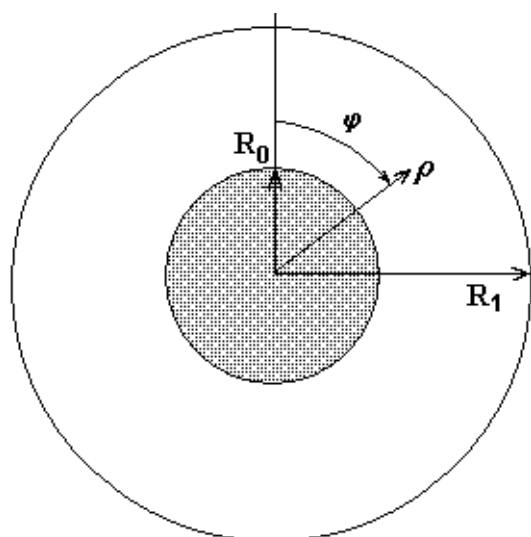


Рис. 3.1.

Уравнения равновесия для этой задачи относительно векторов перемещения и поворота получим, используя (1.20):

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - (\mu + \alpha) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \vec{\omega} &= 0, & (3.1) \\(\beta + 2\gamma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\omega} + 2\alpha \operatorname{rot} \vec{u} - 4\alpha \vec{\omega} &= 0.\end{aligned}$$

В силу симметрии, решение этой задачи для среды Коссера в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) сводится к нахождению

ненулевой компоненты вектора углового перемещения $V(\rho)$, а также вектора поворота $\omega(\rho)$ относительно оси z :

$$\vec{u} = \{0, V(\rho), 0\}, \quad \vec{\omega} = \{0, 0, \omega(\rho)\}. \quad (3.2)$$

Граничные условия для искомых функций примут вид:

$$u_\varphi|_{\rho=R_0} = \varphi_0 \cdot R_0, \quad \omega_z|_{\rho=R_0} = \varphi_0, \quad u_\varphi|_{\rho=R_1} = 0, \quad \omega_z|_{\rho=R_1} = 0. \quad (3.3)$$

Известно, что безразмерный вид величин, характеризующих напряжённо-деформированное состояние симметричной среды с учётом граничных условий (3.3) можно записать так:

$$\begin{aligned} u_\varphi^*(\rho) &= -\frac{R_0^2 \varphi_0}{1 - R_0^2} \rho + \frac{R_0^2 \varphi_0}{(1 - R_0^2) \rho}, \\ \omega_z^*(\rho) &= -\frac{R_0^2 \varphi_0}{1 - R_0^2} \rho, \\ \sigma_{\rho\varphi}^*(\rho) &= -\frac{2R_0^2 \varphi_0}{(1 - R_0^2) \rho^2}, \\ M^* &= \int_0^{2\pi} \sigma_{\rho\varphi}^*(R_0) R_0^2 d\varphi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь ω_z^* - вектор поворота, найденный по соотношению (1.21), M - макромомент, являющийся реакцией внутреннего контура на поворот.

Как и в предыдущей задаче, данные частные решения удовлетворяют уравнениям равновесия для несимметричной среды (3.1) и являются её частными решениями. Нам необходимо отыскать два дополнительных "моментных" частных решения этой системы.

3.1. Решение в рамках среды Коссера Подставляя (3.2) в (3.1), получим уравнения равновесия в виде системы двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $V(\rho)$ и $\omega(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} V(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} V(\rho) - \frac{1}{\rho^2} V(\rho) - \frac{2\alpha}{\alpha + \mu} \frac{d}{d\rho} \omega(\rho) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\rho^2} \omega(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \omega(\rho) - \frac{4\alpha}{\gamma + \varepsilon} \omega(\rho) + \frac{2\alpha}{\gamma + \varepsilon} \frac{d}{d\rho} V(\rho) + \frac{2\alpha}{(\gamma + \varepsilon)\rho} V(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, для решения данной задачи необходимо отыскать функции $V(\rho)$ и $\omega(\rho)$, удовлетворяющие уравнению (3.5) и граничным условиям (3.3).

Общее решение системы уравнений (3.5) имеет вид:

$$\begin{aligned} V(\rho) &= C_1 V_1(\rho) + C_2 V_2(\rho) + C_3 V_3(\rho) + C_4 V_4(\rho), \\ \omega(\rho) &= C_1 \omega_1(\rho) + C_2 \omega_2(\rho) + C_3 \omega_3(\rho) + C_4 \omega_4(\rho). \end{aligned}$$

где $V_i(\rho)$, $\omega_i(\rho)$, ($i = 1, \dots, 4$) - частные решения системы (3.5), а C_i - произвольные постоянные, определяемые из краевых условий.

В качестве $V_1(\rho)$, $V_2(\rho)$ выберем частные решения, соответствующие классической теории упругости (3.4.1):

$$V_1(\rho) = \rho, \quad V_2(\rho) = \frac{1}{\rho}. \quad (3.6)$$

В качестве $\omega_1(\rho)$, $\omega_2(\rho)$ возьмем частные решения из соотношения (3.4.2):

$$\omega_1(\rho) = 1, \quad \omega_2(\rho) = 0. \quad (3.7)$$

Остальные функции получим путём непосредственного решения системы (3.5).

Будем отыскивать оставшиеся "моментные" частные решения системы уравнений (3.5) в два этапа. На первом этапе повысим порядок, исключив из системы неизвестную функцию $\omega(\rho)$ и получив тем самым одно уравнение четвёртого порядка относительно $V(\rho)$. На втором этапе будем последовательно понижать порядок полученного уравнения, используя классические частные решения (3.6).

Исключим переменную $\omega(\rho)$. Для этого дважды продифференцируем уравнение (3.5.1) и подставим найденные производные по $\omega(\rho)$ в (3.5.2), которое также предварительно дифференцируется. Полу-

чим уравнение четвёртого порядка относительно $V(\rho)$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^4}{d\rho^4}V(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{d^3}{d\rho^3}V(\rho) - \left(\frac{3}{\rho^2} + G\right) \frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho) + \\ & + \left(\frac{3}{\rho^3} - \frac{G}{\rho}\right) \frac{d}{d\rho}V(\rho) + \left(-\frac{3}{\rho^4} + \frac{G}{\rho^2}\right) V(\rho) = 0, G = \frac{4\alpha\mu}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Вопрос о существовании решения данного уравнения разрешается теоремой [26]: если коэффициенты уравнения (3.8) непрерывны в интервале (a, b) , то существует фундаментальная система решений, определённых в этом интервале. Таким образом, уравнение (3.8) имеет четыре независимых частных решения, два из которых уже определены соотношениями (3.6).

Коэффициенты при производных в левой части уравнения, содержащие независимую переменную, имеют вид двучленов по степеням этой переменной, причём для каждого коэффициента сумма абсолютных значений младшей степени и порядка производной не превышает порядок уравнения. Это означает, что, быть может, имеется возможность отыскать q -тое частное решение в виде обобщённого ряда по независимой переменной:

$$U_q(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \rho^{n+q}. \quad (3.9)$$

Характеристическое уравнение относительного параметра q имеет вид:

$$(q - 3) \cdot (q - 1)^2 \cdot (q + 1) = 0.$$

Известно [26], что для максимального значения параметра q можно построить частное решение в виде обобщённого ряда (3.9). Для остальных значений параметра это также возможно, если эти значения не кратны максимальному и не кратны между собой. В нашем случае данное условие не выполняется. Следовательно, оставшиеся решения не могут быть представлены в таком виде.

Поэтому для отыскания последних частных решений воспользуемся методом понижения порядка уравнения (3.8), применяя подстановку, основанную на найденном решении [26]:

$$V(\rho) = V_1(\rho) \cdot \int A(\rho) d\rho. \quad (3.10)$$

Получим уравнение третьего порядка:

$$\frac{d^3}{d\rho^3}A(\rho) + \frac{6}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2}A(\rho) + \left(\frac{3}{\rho^2} - G\right) \frac{d}{d\rho}A(\rho) - \left(\frac{3}{\rho^3} + \frac{3G}{\rho}\right) A(\rho) = 0.$$

Используя выражение (3.10), можно определить частное решение полученного уравнения:

$$A_2(\rho) = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{V_2(\rho)}{V_1(\rho)} \right). \quad (3.11)$$

Повторяя процедуру (3.10) еще раз для частного решения A_2 , получим уравнение второго порядка:

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2}M(\rho) - 3\rho \frac{d}{d\rho}M(\rho) + (3 - G\rho^2) M(\rho) = 0.$$

Данное уравнение имеет два частных решения:

$$\begin{aligned} M_1(\rho) &= \rho^2 I_1(\sqrt{G}\rho), \\ M_2(\rho) &= \rho^2 K_1(\sqrt{G}\rho). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь $I_1(\rho)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода [13] порядка γ , в пределе при $\rho \rightarrow \infty$ стремящаяся к бесконечности:

$$I_\gamma(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho/2)^{2k+\gamma}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\gamma+k+1)}. \quad (3.13)$$

$K_1(\rho)$ - модифицированная функция Бесселя второго рода порядка γ , или функция Макдональда, в пределе при $\rho \rightarrow \infty$ стремящаяся к нулю:

$$\begin{aligned} K_\gamma(\rho) &= (-1)^{\gamma+1} I_\gamma(\rho) \left(\ln(\rho/2) + C \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\gamma-1} \frac{(-1)^k (\gamma-k-1)!}{2 k!} (\rho/2)^{2k-\gamma} + \\ &+ \frac{(-1)^\gamma}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho/2)^{2k+\gamma}}{k!(\gamma+k)!} \left(\sum_{s=1}^k \frac{1}{s} + \sum_{s=1}^{k+\gamma} \frac{1}{s} \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где γ - целое число, C - константа Эйлера ($C = 0.5772\dots$).

Данные функции обладают рядом полезных свойств. Выпишем некоторые из них в адаптированном для данной задачи виде. Во-первых, можно изменять порядок этих функций:

$$\begin{aligned} I_{\gamma+1}(\sqrt{G}\rho) &= I_{\gamma-1}(\sqrt{G}\rho) - \frac{2\gamma}{\sqrt{G}\rho} I_{\gamma}(\sqrt{G}\rho), \\ K_{\gamma+1}(\sqrt{G}\rho) &= I_{\gamma-1}(\sqrt{G}\rho) + \frac{2\gamma}{\sqrt{G}\rho} I_{\gamma}(\sqrt{G}\rho). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Во-вторых, для интегрирования и дифференцирования можно использовать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} (\rho^{\gamma} I_{\gamma}(\sqrt{G}\rho)) &= \sqrt{G}\rho^{\gamma} I_{\gamma-1}(\sqrt{G}\rho), \\ \frac{d}{d\rho} (\rho^{-\gamma} I_{\gamma}(\sqrt{G}\rho)) &= -\sqrt{G}\rho^{-\gamma} I_{\gamma+1}(\sqrt{G}\rho), \\ \frac{d}{d\rho} (\rho^{\gamma} K_{\gamma}(\sqrt{G}\rho)) &= -\sqrt{G}\rho^{\gamma} K_{\gamma-1}(\sqrt{G}\rho), \\ \frac{d}{d\rho} (\rho^{-\gamma} K_{\gamma}(\sqrt{G}\rho)) &= \sqrt{G}\rho^{-\gamma} K_{\gamma+1}(\sqrt{G}\rho). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Используя правила (3.15) и (3.16), а также (3.10), два раз проинтегрируем частные решения (3.12), и получим оставшиеся "моментные" частные решения уравнения четвёртого порядка (3.8):

$$\begin{aligned} V_3(\rho) &= \frac{I_1(2A\rho)}{2A^2}, \\ V_4(\rho) &= \frac{K_1(2A\rho)}{2A^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для отыскания компонент вектора поворота воспользуемся (3.5.1), которое перепишем в виде

$$\frac{d}{d\rho} \omega(\rho) = \frac{\alpha + \mu}{2\alpha} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} V(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} V(\rho) - \frac{1}{\rho^2} V(\rho) \right),$$

откуда находим оставшиеся частные решения для компонент вектора поворота:

$$\begin{aligned} \omega_3(\rho) &= \frac{BI_0(2A\rho)}{2A}, \\ \omega_4(\rho) &= \frac{BK_0(2A\rho)}{2A}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Выражения (3.17) и (3.18) являются двумя "моментными" частными решениями системы (3.5), в чём можно непосредственно убедиться простой подстановкой.

Для отыскания компонент тензора напряжений воспользуемся соотношениями (1.33), а для компонент тензора моментных напряжений - соотношениями (1.35).

С точки зрения удобства анализа получаемых решений все величины приведем к безразмерному виду. Пусть радиус внешнего контура R_1 является характерным геометрическим размером. Обозначим символом $\hat{\cdot}$ размерные величины, которые связаны с безразмерными следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\hat{u}_i &= R_1 u_i, & \hat{\sigma}_{ij} &= \mu \sigma_{ij}, & \hat{\mu}_{ij} &= R_1 \mu \mu_{ij}, \\ \hat{\rho} &= R_1 \rho, & \hat{C}_2 &= R_1^2 C_2, & \hat{C}_3 &= \frac{C_3}{R_1^2}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Используем также ранее введенные (1.18) безразмерные величины A, B, C . Тогда окончательно решение запишем в виде:

$$\begin{aligned}u_\varphi(\rho) &= C_1 \rho + C_2 \frac{1}{\rho} - C_3 \frac{I_1(2A\rho)}{2A^2} - C_4 \frac{K_1(2A\rho)}{2A^2}, \\ \omega_z(\rho) &= C_1 - C_3 \frac{BI_0(2A\rho)}{2A} + C_4 \frac{BK_0(2A\rho)}{2A}, \\ \sigma_{\rho\varphi}(\rho) &= -\frac{2C_2}{\rho^2} + C_3 \frac{I_1(2A\rho)}{2A^2\rho} + C_4 \frac{K_1(2A\rho)}{2A^2\rho}, \\ \sigma_{\varphi\rho}(\rho) &= -\frac{2C_2}{\rho^2} + C_3 \left(\frac{I_1(2A\rho)}{2A^2\rho} - \frac{2I_0(2A\rho)}{A} \right) + \\ &\quad + C_4 \left(\frac{K_1(2A\rho)}{2A^2\rho} + \frac{2K_0(2A\rho)}{A} \right), \\ \mu_{\rho z}(\rho) &= -C_3 \frac{I_1(2A\rho)}{2A^2} - C_4 \frac{K_1(2A\rho)}{2A^2}, \\ M &= \int_0^{2\pi} \sigma_{\rho\varphi}(R_0) R_0^2 d\varphi + \int_0^{2\pi} \mu_{\rho z}(R_0) R_0 d\varphi.\end{aligned}\quad (3.20)$$

Константы C_1, \dots, C_4 определяются из краевых условий (3.3) для конкретных значений безразмерных величин A и B из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} R_0 & \frac{1}{R_0} & -\frac{I_1(2AR_0)}{2A^2} & -\frac{K_1(2AR_0)}{2A^2} \\ 1 & 0 & -\frac{BI_0(2AR_0)}{2A} & \frac{BK_0(2AR_0)}{2A} \\ R_1 & \frac{1}{R_1} & -\frac{I_1(2AR_1)}{2A^2} & -\frac{K_1(2AR_1)}{2A^2} \\ 1 & 0 & -\frac{BI_0(2AR_1)}{2A} & \frac{BK_0(2AR_1)}{2A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0 R_0 \\ \varphi_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3.2. Решение в рамках среды псевдокоссера Аналогично, подставляя вектор перемещений (3.2) в уравнения равновесия для среды псевдокоссера (1.23), получим уравнение равновесия в виде дифференциального уравнения четвёртого порядка относительно функции $V(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{d\rho^4}V(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho) - \left(4H + \frac{3}{\rho^2}\right) \frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho) - \\ \left(\frac{4H}{\rho} - \frac{3}{\rho^3}\right) \frac{d}{d\rho}V(\rho) + \left(\frac{4H}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) V(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Как и в постановке для среды Коссера, здесь также присутствует всего один безразмерный физический параметр:

$$H = \frac{\mu}{\gamma + \varepsilon}.$$

Решение уравнения (3.21), соответствующего среде псевдокоссера, описывается соотношениями (3.20) при $B = 1$ (1.18), что было проверено путём непосредственного решения этого уравнения.

Глава 4.

Задача о деформировании ПЛОСКОГО КОЛЬЦА

Рассмотрим кольцо (цилиндр), жёстко закреплённое по внешнему контуру $\rho = R_1$ (рис. 4.1). Деформирование кольца осуществляется за счёт жёского смещения внутреннего контура $\rho = R_0$ на величину d вдоль оси Oy .

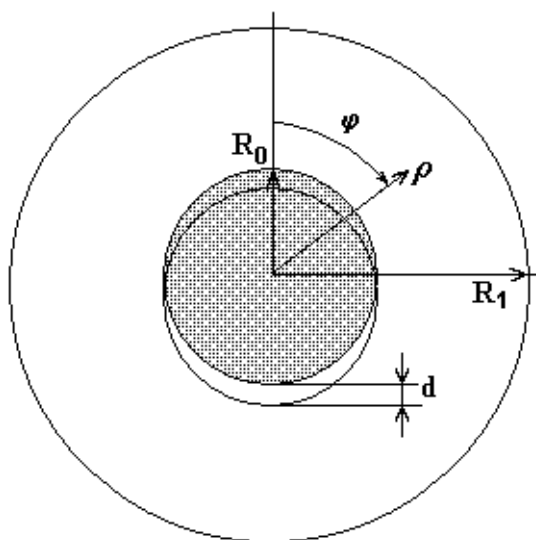


Рис. 4.1.

Уравнения равновесия для этой задачи относительно векторов перемещения и поворота получим, используя (1.20):

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - (\mu + \alpha) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \vec{\omega} = 0, \quad (4.1)$$

$$(\beta + 2\gamma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\omega} + 2\alpha \operatorname{rot} \vec{u} - 4\alpha \vec{\omega} = 0.$$

В силу симметрии, решение задачи будем искать в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) в разложении по азимутальному углу в виде:

$$\begin{aligned}\vec{u}(\rho, \varphi) &= \{U(\rho) \cos(\varphi), V(\rho) \sin(\varphi), 0\}, \\ \vec{\omega}(\rho, \varphi) &= \{0, 0, \omega(\rho) \sin(\varphi)\}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Граничные условия запишем так:

$$\begin{aligned}u_\rho|_{\rho=R_0} &= -d \cos(\varphi), & u_\varphi|_{\rho=R_0} &= d \sin(\varphi), \\ \omega_z|_{\rho=R_0} &= 0, & u_\rho = u_\varphi = \omega_z|_{\rho=R_1} &= 0.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Вектор перемещения, соответствующий решению данной задачи в рамках симметричной теории упругости, вектор поворота, найденный по соотношению (1.21), а также компоненты тензора напряжений примут вид:

$$\begin{aligned}u_\rho^*(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(C_1^* + \frac{C_2^*}{\rho^2} + C_3^* \rho^2 + C_4^* \ln(\rho) \right), \\ u_\varphi^*(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(-C_1^* + \frac{C_2^*}{\rho^2} + C_3^* \frac{3\lambda + 5\mu}{\mu - \lambda} \rho^2 - \right. \\ &\quad \left. - C_4^* \left\{ \ln(\rho) + \frac{\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \right\} \right), \\ \omega_z^*(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(C_3^* \frac{8\mu + 4\lambda}{\mu - \lambda} \rho - C_4^* \frac{2\mu + \lambda}{(3\mu + \lambda)\rho} \right), \\ \sigma_{\rho\rho}^*(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(-C_2^* \frac{4}{\rho^3} + C_3^* \frac{4(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho + C_4^* \frac{2(3\mu + 2\lambda)}{(3\mu + \lambda)\rho} \right), \\ \sigma_{\rho\varphi}^*(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(-C_2^* \frac{4}{\rho^3} + C_3^* \frac{4(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho - C_4^* \frac{2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} \right), \\ \sigma_{\varphi\rho}^*(\rho, \varphi) &= \sigma_{\rho\varphi}^*(\rho, \varphi), \\ \sigma_{\varphi\varphi}^*(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(C_2^* \frac{4}{\rho^3} + C_3^* \frac{12(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho - C_4^* \frac{2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} \right), \\ F_y^* &= \int_0^{2\pi} (\sigma_{\rho\varphi}^*(R_0, \varphi) \sin(\varphi) + \sigma_{\rho\rho}^*(R_0, \varphi) \cos(\varphi)) R_0 d\varphi.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Здесь F_y - величина реакции внутреннего контура на жёсткое смещение на величину d , константы C_1^*, \dots, C_4^* будут определяться из соответствующей части краевых условий (4.3).

Как и в предыдущих задачах, отыщем дополнительные "моментные" частные решения.

4.1. Решение в рамках среды Коссера Подставляя (4.2) в (4.1), используя при этом правила вычисления дифференциальных операторов в цилиндрической системе координат (1.29)-(1.31), получим уравнения равновесия в виде системы трёх линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $U(\rho)$, $V(\rho)$ и $\omega(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}U(\rho) - \frac{3\mu + \alpha + \lambda}{(2\mu + \lambda)\rho^2}U(\rho) - \frac{\alpha - \mu - \lambda}{(2\mu + \lambda)\rho} \frac{d}{d\rho}V(\rho) - \\ - \frac{3\mu + \alpha + \lambda}{(2\mu + \lambda)\rho^2}V(\rho) + \frac{2\alpha}{(2\mu + \lambda)\rho}\omega(\rho) = 0, \\ \frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}V(\rho) - \frac{3\mu + \alpha + \lambda}{(\mu + \alpha)\rho^2}V(\rho) + \frac{\alpha - \mu - \lambda}{(\mu + \alpha)\rho} \frac{d}{d\rho}U(\rho) - \\ - \frac{3\mu + \alpha + \lambda}{(\mu + \alpha)\rho^2}U(\rho) - \frac{2\alpha}{(\mu + \alpha)} \frac{d}{d\rho}\omega(\rho) = 0, \\ \frac{d^2}{d\rho^2}\omega(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\omega(\rho) - \frac{4\alpha\rho^2 + \gamma + \varepsilon}{(\gamma + \varepsilon)\rho^2}\omega(\rho) + \frac{2\alpha}{\gamma + \varepsilon} \frac{d}{d\rho}V(\rho) + \\ + \frac{2\alpha}{(\gamma + \varepsilon)\rho}V(\rho) + \frac{2\alpha}{(\gamma + \varepsilon)\rho}U(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Общее решение системы уравнений (4.5) имеет вид:

$$\begin{aligned} U(\rho) &= \sum_{i=1}^6 C_i U_i(\rho), \\ V(\rho) &= \sum_{i=1}^6 C_i V_i(\rho), \\ \omega(\rho) &= \sum_{i=1}^6 C_i \omega_i(\rho). \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $U_i(\rho)$, $V_i(\rho)$, $\omega_i(\rho)$, ($i = 1, \dots, 6$) - частные решения системы (4.5), а C_i - произвольные постоянные, определяемые из краевых условий.

В качестве $U_i(\rho)$, ($i = 1, \dots, 4$) выберем частные решения, соответствующие классической теории упругости (4.4.1):

$$U_1(\rho) = 1, \quad U_2(\rho) = \frac{1}{\rho^2}, \quad U_3(\rho) = \rho^2, \quad U_4(\rho) = \ln(\rho). \quad (4.7)$$

Эти функции мы будем применять далее для эффективного построения двух оставшихся "моментных" частных решений, которые будем отыскивать в три этапа. На первом этапе повысим порядок, ис-

ключив из системы неизвестную функцию $V(\rho)$ и получив тем самым систему уравнений четвёртого порядка. На втором этапе повысим порядок до шестого, исключив функцию $\omega(\rho)$. На третьем этапе будем последовательно понижать порядок полученного уравнения с использованием классических частных решений и определим тем самым последние "моментные" частные решения.

Исключим переменную $V(\rho)$. Для этого продифференцируем уравнение (4.5.1), заменив в нём вторую производную по $V(\rho)$ значением, взятым из (4.5.2). Получим уравнение третьего порядка относительно $U(\rho)$, после чего перепишем его и (4.5.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \lambda - \mu}{(2\mu + \lambda)\rho} \frac{d}{d\rho} V(\rho) + \frac{3\mu + \alpha + \lambda}{(2\mu + \lambda)\rho^2} V(\rho) = \frac{d^2}{d\rho^2} U(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} U(\rho) - \\ - \frac{A_5}{\rho^2} U(\rho) + \frac{2A_4}{\rho} \omega(\rho), \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - 5\mu - 3\lambda}{(2\mu + \lambda)\rho^2} \frac{d}{d\rho} V(\rho) + \frac{(3\mu + \alpha + \lambda)^2}{(2\mu + \lambda)(\alpha + \mu)\rho^3} V(\rho) = -\frac{d^3}{d\rho^3} U(\rho) - \\ - \frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} U(\rho) - \frac{A_3}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} U(\rho) - \frac{A_2}{\rho^3} U(\rho) - \frac{2A_1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \omega(\rho) + \frac{2A_4}{\rho^2} \omega(\rho). \end{aligned}$$

В приведённых выше уравнениях:

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{\alpha}{\mu + \alpha}, \quad A_2 = \frac{(3\mu + \alpha + \lambda)^2}{(\mu + \alpha)(2\mu + \lambda)}, \quad A_3 = \frac{\lambda - 2\mu - 4\alpha}{\mu + \alpha}, \\ A_4 = \frac{\alpha}{2\mu + \lambda}, \quad A_5 = -\frac{3\mu + \alpha + \lambda}{2\mu + \lambda}. \end{aligned}$$

Представляя (4.8) как систему линейных алгебраических уравнений, разрешим её относительно символов $V(\rho)$ и $\frac{d}{d\rho} V(\rho)$:

$$\begin{aligned} V(\rho) = B_{11}\rho^3 \frac{d^3}{d\rho^3} U(\rho) + B_{12}\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} U(\rho) + B_{13}\rho \frac{d}{d\rho} U(\rho) - U(\rho) + \\ + B_{14}\rho^2 \frac{d}{d\rho} \omega(\rho) + B_{15}\rho \omega(\rho), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} V(\rho) = B_{21}\rho^2 \frac{d^3}{d\rho^3} U(\rho) + B_{22}\rho \frac{d^2}{d\rho^2} U(\rho) + B_{23} \frac{d}{d\rho} U(\rho) + \\ + B_{24}\rho \frac{d}{d\rho} \omega(\rho) + B_{25}\omega(\rho). \end{aligned}$$

Для примера приведём вид констант в соотношении для $V(\rho)$:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{(\mu + \alpha)(\mu - \alpha + \lambda)}{(\mu - \lambda + 3\alpha)(\lambda + \alpha + 3\mu)}, \\ B_{12} &= \frac{2(\mu + \alpha)(3\mu - \alpha + 2\lambda)}{(\mu - \lambda + 3\alpha)(\lambda + \alpha + 3\mu)}, \\ B_{13} &= \frac{2\mu\lambda + 3\alpha^2 + 3\mu^2 - 2\lambda\alpha + \lambda^2 + 2\mu\alpha}{(\mu - \lambda + 3\alpha)(\lambda + \alpha + 3\mu)}, \\ B_{14} &= \frac{2\alpha(\mu - \alpha + \lambda)}{(\mu - \lambda + 3\alpha)(\lambda + \alpha + 3\mu)}, \\ B_{15} &= \frac{4\alpha(\mu + \alpha)}{(\mu - \lambda + 3\alpha)(\lambda + \alpha + 3\mu)}. \end{aligned}$$

Далее дважды дифференцируем (4.5.1), каждый раз заменяя выражения для $\frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho)$, $\frac{d}{d\rho}V(\rho)$, $V(\rho)$, $\frac{d^2}{d\rho^2}\omega(\rho)$ на значения, взятые из (4.5.2)-(4.5.3), и (4.9), в результате получим уравнение четвёртого порядка относительно $U(\rho)$. Добавляем к нему уравнение (4.5.3), в которое также подставлены выражения (4.9), получим систему однородных линейных дифференциальных уравнений четвёртого порядка с двумя неизвестными функциями:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{d\rho^4}U(\rho) + \frac{6}{\rho} \frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) + \frac{3}{\rho^2} \frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) - \frac{3}{\rho^3} \frac{d}{d\rho}U(\rho) + \\ + \frac{2C_0}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2}\omega(\rho) + \frac{2C_0}{\rho^2} \frac{d}{d\rho}\omega(\rho) - \frac{2C_0}{\rho^3}\omega(\rho) = 0, \\ \frac{d^2}{d\rho^2}\omega(\rho) + \left(8C_1\rho + \frac{1}{\rho}\right) \frac{d}{d\rho}\omega(\rho) - \left(4C_2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\omega(\rho) + \\ + 4C_3\rho^2 \frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) + 2C_4\rho \frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + 6C_5 \frac{d}{d\rho}U(\rho) = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Коэффициенты данных уравнений определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{\alpha}{\alpha + \mu}, \\ C_1 &= \frac{\alpha^2(\lambda + 2\mu)}{(3\alpha + \mu - \lambda)(\gamma + \varepsilon)(3\mu + \alpha + \lambda)}, \\ C_2 &= \frac{\alpha(\alpha\lambda - \lambda^2 + 3\mu^2 + 5\mu\alpha - 2\mu\lambda)}{(3\alpha + \mu - \lambda)(\gamma + \varepsilon)(3\mu + \alpha + \lambda)}, \\ C_3 &= \frac{\alpha(\alpha + \mu)(2\mu + \lambda)}{(3\alpha + \mu - \lambda)(\gamma + \varepsilon)(3\mu + \alpha + \lambda)}, \\ C_4 &= \frac{\alpha(7\alpha + \lambda + 9\mu)(2\mu + \lambda)}{(3\alpha + \mu - \lambda)(\gamma + \varepsilon)(3\mu + \alpha + \lambda)}, \\ C_5 &= \frac{\alpha(\mu - \alpha + \lambda)(2\mu + \lambda)}{(3\alpha + \mu - \lambda)(\gamma + \varepsilon)(3\mu + \alpha + \lambda)}. \end{aligned}$$

Еще раз выполним процедуру повышения порядка, исключив из (4.10) функцию $\omega(\rho)$ и сведя его к уравнению шестого порядка. Процедура аналогична описанной ранее, поэтому приведём только результат:

$$\begin{aligned} \omega(\rho) = & -\frac{D_1}{4}\rho^2 \frac{d^5}{d\rho^5}U(\rho) - \frac{D_2}{8}\rho \frac{d^4}{d\rho^4}U(\rho) + \left(D_3\rho^2 - \frac{3D_4}{4}\right) \frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) + \\ & + \left(\frac{D_5}{2}\rho - \frac{D_6}{8\rho}\right) \frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + \left(\frac{3D_7}{8} + \frac{3D_8}{8\rho^2}\right) \frac{d}{d\rho}U(\rho). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Коэффициенты определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{(\alpha + \mu)(2\mu + \lambda)(\gamma + \varepsilon)}{\alpha(3\mu + \lambda)(\mu - \lambda)}, \\ D_2 &= \frac{(\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon)(15\alpha\lambda - \lambda^2 + 3\mu^2 + 33\alpha\mu - 2\mu\lambda)}{\alpha^2(3\mu + \lambda)(\mu - \lambda)}, \\ D_3 &= \frac{\mu(2\mu + \lambda)}{(3\mu + \lambda)(\mu - \lambda)}, \\ D_4 &= \frac{(\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon)(3\mu^2 - 2\mu\lambda + 7\alpha\mu - \lambda^2 + 2\alpha\lambda)}{\alpha^2(3\mu + \lambda)(\mu - \lambda)}, \\ D_5 &= \frac{(2\mu + \lambda)(9\mu + \lambda)}{(3\mu + \lambda)(\mu - \lambda)}, \\ D_6 &= \frac{3(\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon)(3\mu^2 - 2\mu\lambda - 3\alpha\mu - 3\alpha\lambda - \lambda^2)}{\alpha^2(3\mu + \lambda)(\mu - \lambda)}, \\ D_7 &= \frac{4(\mu + \lambda)(2\mu + \lambda)}{(3\mu + \lambda)(\mu - \lambda)}, \\ D_8 &= \frac{(\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon)(3\mu^2 - 2\mu\lambda - 3\alpha\mu - 3\alpha\lambda - \lambda^2)}{\alpha^2(3\mu + \lambda)(\mu - \lambda)}. \end{aligned}$$

Уравнение шестого порядка:

$$\begin{aligned} & \frac{d^6}{d\rho^6}U(\rho) + \frac{9}{\rho} \frac{d^5}{d\rho^5}U(\rho) + \left(\frac{9}{\rho^2} - G\right) \frac{d^4}{d\rho^4}U(\rho) - \\ & - \left(\frac{12}{\rho^3} + \frac{6G}{\rho}\right) \frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) + \left(\frac{9}{\rho^4} - \frac{3G}{\rho^2}\right) \frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) - \\ & - \left(\frac{9}{\rho^5} - \frac{3G}{\rho^3}\right) \frac{d}{d\rho}U(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Как и ранее, безразмерный физический комплекс G имеет вид:

$$G = \frac{4\alpha\mu}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}.$$

Составим характеристическое уравнение для проверки возможности записи частных решений в виде обобщённых рядов:

$$(q - 4) \cdot (q - 2)^2 \cdot q^2 \cdot (q + 2) = 0.$$

Как и в предыдущей задаче, характеристическое уравнение дает нам кратные корни, поэтому, используя процедуру (3.10)-(3.11) и классические частные решения (4.7), будем последовательно понижать порядок уравнения (4.12).

Уравнение пятого порядка получим, используя $U_1(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^5}{d\rho^5}F(\rho) - \frac{9}{\rho} \frac{d^4}{d\rho^4}F(\rho) - \left(G - \frac{9}{\rho^2}\right) \frac{d^3}{d\rho^3}F(\rho) - \left(\frac{6G}{\rho} + \frac{12}{\rho^3}\right) \frac{d^2}{d\rho^2}F(\rho) - \\ - \left(\frac{3G}{\rho^2} - \frac{9}{\rho^4}\right) \frac{d}{d\rho}F(\rho) + \left(\frac{3G}{\rho^3} - \frac{9}{\rho^5}\right) F(\rho) = 0. \end{aligned}$$

Частные решения уравнения пятого порядка:

$$F_2(\rho) = \frac{1}{\rho^3}, \quad F_3(\rho) = \rho, \quad F_4(\rho) = \frac{1}{\rho}.$$

Для получения уравнения четвертого порядка используем $F_2(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{d\rho^4}H(\rho) - \frac{6}{\rho} \frac{d^3}{d\rho^3}H(\rho) - \left(G - \frac{21}{\rho^2}\right) \frac{d^2}{d\rho^2}H(\rho) + \\ + \left(\frac{3G}{\rho} - \frac{45}{\rho^3}\right) \frac{d}{d\rho}H(\rho) + \left(\frac{3G}{\rho^2} - \frac{45}{\rho^4}\right) H(\rho) = 0. \end{aligned}$$

Два частных решения этого уравнения:

$$H_3(\rho) = \rho^3, \quad H_4(\rho) = \rho.$$

Для получения уравнения третьего порядка используем $H_3(\rho)$:

$$\frac{d^3}{d\rho^3}H(\rho) + \frac{6}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2}H(\rho) - \left(G - \frac{3}{\rho^2}\right) \frac{d}{d\rho}H(\rho) - \left(\frac{3G}{\rho} + \frac{3}{\rho^3}\right) H(\rho) = 0.$$

Частное решение этого уравнения:

$$H_4(\rho) = \frac{1}{\rho^3}.$$

И, наконец, используя последнее частное решение H_4 , получим уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2}{d\rho^2}M(\rho) - \frac{3}{\rho} \frac{d}{d\rho}M(\rho) - \left(G + \frac{3}{\rho^2}\right) M(\rho) = 0.$$

Как и в предыдущей задаче, данное уравнение имеет два частных решения, записанных через модифицированные функции Бесселя первого (3.13) и второго (3.14) рода первого порядка [13]:

$$\begin{aligned} M_1(\rho) &= \rho^2 I_1(\sqrt{G}\rho), \\ M_2(\rho) &= \rho^2 K_1(\sqrt{G}\rho). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Используя правила (3.15) и (3.16), а также (3.10), два раз проинтегрируем частные решения (4.13) и получим оставшиеся "моментные" частные решения уравнения шестого порядка (4.12):

$$\begin{aligned} U_5(\rho) &= \frac{I_1(2A\rho)}{\rho}, \\ U_6(\rho) &= \frac{K_1(2A\rho)}{\rho}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Воспользуемся тем, что общее решение системы уравнений (4.5) является суммой шести частных. Общий вид функции $U(\rho)$ определим, просуммировав с помощью соотношения (4.6.1) частные решения (4.7) и (4.14). Далее, используя (4.11), получим общий вид функции $\omega(\rho)$ и, наконец, с помощью соотношения (4.9.1) выразим функцию $V(\rho)$.

Для отыскания компонент тензора напряжений воспользуемся соотношениями (1.33), а для компонент тензора моментных напряжений - соотношениями (1.35).

С точки зрения удобства анализа получаемых решений все величины приведём к безразмерному виду. Пусть радиус внешнего контура R_1 является характерным геометрическим размером. Обозначим символом $\hat{\cdot}$ размерные величины, которые связаны с безразмерными следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= R_1 u_i, & \hat{\sigma}_{ij} &= \mu \sigma_{ij}, & \hat{\mu}_{ij} &= R_1 \mu \mu_{ij}, & \hat{\rho} &= R_1 \rho, \\ \hat{C}_1 &= R_1 C_1, & \hat{C}_2 &= R_1^3 C_2, & \hat{C}_3 &= \frac{C_3}{R_1}, & \hat{C}_4 &= R_1 C_4, \\ & & \hat{C}_5 &= \frac{C_5}{R_1^3}, & \hat{C}_6 &= \frac{C_6}{R_1}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Используем также ранее введённые (1.18) безразмерные величины A, B, C . Тогда окончательный вид решения запишем так:

$$\begin{aligned}
u_\rho(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} + C_3 \rho^2 + C_4 \ln(\rho) + \right. \\
&\quad \left. + C_5 \frac{I_1(2A\rho)}{\rho} + C_6 \frac{K_1(2A\rho)}{\rho} \right), \\
u_\varphi(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(-C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} + C_3 \frac{3\lambda + 5\mu}{\mu - \lambda} \rho^2 - \right. \\
&\quad \left. - C_4 \left\{ \ln(\rho) + \frac{\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \right\} + C_5 \left\{ \frac{I_1(2A\rho)}{\rho} - 2AI_0(2A\rho) \right\} + \right. \\
&\quad \left. + C_6 \left\{ \frac{K_1(2A\rho)}{\rho} + 2AK_0(2A\rho) \right\} \right), \\
\omega_z(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(C_3 \frac{8\mu + 4\lambda}{\mu - \lambda} \rho - C_4 \frac{2\mu + \lambda}{(3\mu + \lambda)\rho} - \right. \\
&\quad \left. - 2A^2BI_1(2A\rho)C_5 - 2A^2BK_1(2A\rho)C_6 \right), \\
\sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(-C_2 \frac{4}{\rho^3} + C_3 \frac{4(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho + C_4 \frac{2(3\mu + 2\lambda)}{(3\mu + \lambda)\rho} + \right. \\
&\quad \left. + C_5 S_{\rho\rho}^{(5)}(\rho) + C_6 S_{\rho\rho}^{(6)}(\rho) \right), \\
\sigma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(-C_2 \frac{4}{\rho^3} + C_3 \frac{4(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho - C_4 \frac{2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} + \right. \\
&\quad \left. + C_5 S_{\rho\varphi}^{(5)}(\rho) + C_6 S_{\rho\varphi}^{(6)}(\rho) \right), \\
\sigma_{\varphi\rho}(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(-C_2 \frac{4}{\rho^3} + C_3 \frac{4(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho - C_4 \frac{2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} + \right. \\
&\quad \left. + C_5 S_{\varphi\rho}^{(5)}(\rho) + C_6 S_{\varphi\rho}^{(6)}(\rho) \right), \\
\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(C_2 \frac{4}{\rho^3} + C_3 \frac{12(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho - C_4 \frac{2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} + \right. \\
&\quad \left. + C_5 S_{\varphi\varphi}^{(5)}(\rho) + C_6 S_{\varphi\varphi}^{(6)}(\rho) \right), \\
\mu_{\rho z}(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(C_3 \frac{4(2\mu + \lambda)}{(\mu - \lambda)A^2B} + C_4 \frac{2\mu + \lambda}{(3\mu + \lambda)A^2B\rho^2} + \right. \\
&\quad \left. + C_5 M_{\rho z}^{(5)}(\rho) + C_6 M_{\rho z}^{(6)}(\rho) \right), \\
\mu_{\varphi z}(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(C_3 \frac{4(2\mu + \lambda)}{(\mu - \lambda)A^2B} - C_4 \frac{2\mu + \lambda}{(3\mu + \lambda)A^2B\rho^2} + \right. \\
&\quad \left. + C_5 M_{\varphi z}^{(5)}(\rho) + C_6 M_{\varphi z}^{(6)}(\rho) \right), \\
\mu_{z\rho}(\rho, \varphi) &= C\mu_{\rho z}(\rho, \varphi), \\
\mu_{z\varphi}(\rho, \varphi) &= C\mu_{\varphi z}(\rho, \varphi), \\
F_y &= \int_0^{2\pi} (\sigma_{\rho\varphi}(R_0, \varphi) \sin(\varphi) + \sigma_{\rho\rho}(R_0, \varphi) \cos(\varphi)) R_0 d\varphi.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Функции, зависящие от ρ , введённые в выражении (4.16) и соот-

ветствующие "моментным" частным решениям, определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
U_5(\rho) &= \frac{I_1(2A\rho)}{\rho}, \\
U_6(\rho) &= \frac{K_1(2A\rho)}{\rho}, \\
V_5(\rho) &= \frac{I_1(2A\rho)}{\rho} - 2AI_0(2A\rho), \\
V_6(\rho) &= \frac{K_1(2A\rho)}{\rho} + 2AK_0(2A\rho), \\
\omega_5(\rho) &= 2A^2BI_1(2A\rho), \\
\omega_6(\rho) &= -2A^2BK_1(2A\rho), \\
S_{\rho\rho}^{(5)}(\rho) &= \frac{4A}{\rho}I_0(2A\rho) - \frac{4}{\rho^2}I_1(2A\rho), \\
S_{\rho\rho}^{(6)}(\rho) &= -\frac{4A}{\rho}K_0(2A\rho) - \frac{4}{\rho^2}K_1(2A\rho), \\
S_{\rho\varphi}^{(5)}(\rho) &= \frac{4A}{\rho}I_0(2A\rho) - \frac{4}{\rho^2}I_1(2A\rho), \\
S_{\rho\varphi}^{(6)}(\rho) &= -\frac{4A}{\rho}K_0(2A\rho) - \frac{4}{\rho^2}K_1(2A\rho), \\
S_{\varphi\rho}^{(5)}(\rho) &= \frac{4A}{\rho}I_0(2A\rho) - \frac{4 + 8A^2\rho^2}{\rho^2}I_1(2A\rho), \\
S_{\varphi\rho}^{(6)}(\rho) &= -\frac{4A}{\rho}K_0(2A\rho) - \frac{4 + 8A^2\rho^2}{\rho^2}I_1(2A\rho), \\
S_{\varphi\varphi}^{(5)}(\rho) &= -\frac{4A}{\rho}I_0(2A\rho) + \frac{4}{\rho^2}I_1(2A\rho), \\
S_{\varphi\varphi}^{(6)}(\rho) &= \frac{4A}{\rho}K_0(2A\rho) + \frac{4}{\rho^2}K_1(2A\rho), \\
M_{\rho z}^{(5)}(\rho) &= -4AI_0(2A\rho) + \frac{2}{\rho}I_1(2A\rho), \\
M_{\rho z}^{(6)}(\rho) &= 4AK_0(2A\rho) + \frac{2}{\rho}K_1(2A\rho), \\
M_{\varphi z}^{(5)}(\rho) &= -\frac{2}{\rho}I_1(2A\rho), \\
M_{\varphi z}^{(6)}(\rho) &= -\frac{2}{\rho}K_1(2A\rho).
\end{aligned}$$

Константы C_1, \dots, C_6 определяются из краевых условий (4.3). Подставляя решение (4.16) в граничные условия (4.3), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно искомым

КОНСТАНТ:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{R_0^2} & R_0^2 & \ln(R_0) & U_5(R_0) & U_6(R_0) \\ -1 & \frac{1}{R_0^2} & \frac{R_0^2(3\lambda+5\mu)}{\mu-\lambda} & -\frac{\mu+\lambda}{3\mu+\lambda}\ln(R_0) & V_5(R_0) & V_6(R_0) \\ 0 & 0 & \frac{R_0(4\lambda+8\mu)}{\mu-\lambda} & -\frac{2\mu+\lambda}{R_0(3\mu+\lambda)} & \omega_5(R_0) & \omega_6(R_0) \\ 1 & \frac{1}{R_1^2} & R_1^2 & \ln(R_1) & U_5(R_1) & U_6(R_1) \\ -1 & \frac{1}{R_1^2} & \frac{R_1^2(3\lambda+5\mu)}{\mu-\lambda} & -\frac{\mu+\lambda}{3\mu+\lambda}\ln(R_1) & V_5(R_1) & V_6(R_1) \\ 0 & 0 & \frac{R_1(4\lambda+8\mu)}{\mu-\lambda} & -\frac{2\mu+\lambda}{R_1(3\mu+\lambda)} & \omega_5(R_1) & \omega_6(R_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для конкретного набора физических констант μ, λ, A, B эта система может быть решена численно.

4.2. Решение в рамках среды псевдокоссера Аналогично, подставляя вектор перемещений (4.2) в (1.23), получим уравнения равновесия для среды псевдокоссера в виде системы линейных дифференциальных уравнений относительно функций $U(\rho)$ и $V(\rho)$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^3}{d\rho^3}V(\rho) + \frac{2}{\rho}\frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho) + \left(4\frac{\mu+\lambda}{\gamma+\varepsilon} - \frac{2}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\rho}V(\rho) - \\ & - 4\frac{3\mu+\lambda}{(\gamma+\varepsilon)\rho}V(\rho) + \left(4\frac{2\mu+\lambda}{\gamma+\varepsilon}\rho + \frac{1}{\rho}\right)\frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + \\ & + \left(4\frac{2\mu+\lambda}{\gamma+\varepsilon} - \frac{1}{\rho^2}\right)\frac{d}{d\rho}U(\rho) - 4\frac{3\mu+\lambda}{(\gamma+\varepsilon)\rho}U(\rho) = 0, \\ & \frac{d^4}{d\rho^4}V(\rho) + \frac{2}{\rho}\frac{d^3}{d\rho^3}V(\rho) - \left(4\frac{\mu}{\gamma+\varepsilon} + \frac{4}{\rho^2}\right)\frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho) - \\ & - \left(4\frac{\mu}{(\gamma+\varepsilon)\rho} - \frac{4}{\rho^3}\right)\frac{d}{d\rho}V(\rho) + 4\frac{3\mu+\lambda}{(\gamma+\varepsilon)\rho^2}V(\rho) + \\ & + \frac{1}{\rho}\frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) - \frac{2}{\rho^2}\frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + \left(4\frac{\mu+\lambda}{(\gamma+\varepsilon)\rho} + \frac{2}{\rho^3}\right)\frac{d}{d\rho}U(\rho) + \\ & + 4\frac{3\mu+\lambda}{(\gamma+\varepsilon)\rho^2}U(\rho) = 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Решение системы уравнений (4.17) описывается соотношениями (4.16) при $B = 1$ (1.18).

Глава 5.

Задача Кирша о растяжении бесконечной плоскости, ослабленной круговым отверстием

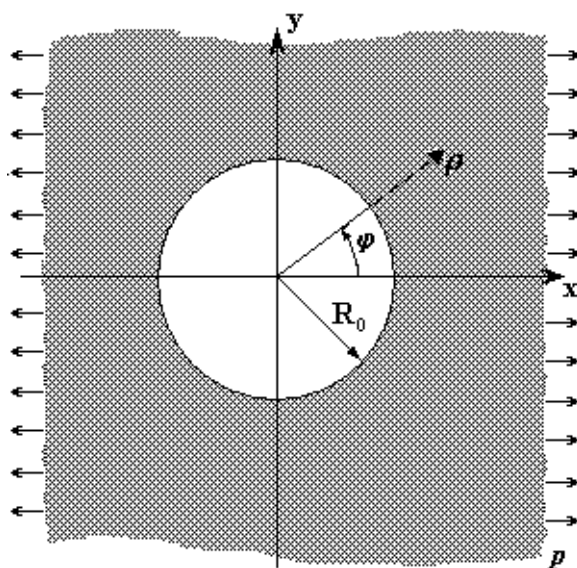


Рис. 5.1.

Рассмотрим задачу об одноосном растяжении пластины, ослабленной круговым отверстием. Пусть края кругового отверстия свободны от внешних напряжений и на бесконечности действует растягивающее усилие постоянной интенсивности p в направлении оси Ox (рис. 5.1).

Впервые, в рамках классической теории упругости, эта задача

была решена Киршем, позднее, несколько иным путём, Н.И.Мусхелишвили [29]. Обобщение этой задачи на случай среды псевдокоссе-ра можно найти в работе R.D.Mindlin [65].

В.А.Пальмовым [37] была определена концентрация напряжений вблизи кругового отверстия в рамках среды Коссера. Следует отметить, что решение, приведённое в [37], не позволяет в полной мере проанализировать напряжённо-деформированное состояние в окрестности кругового отверстия, в частности, характеризовать степень искажения отверстия при деформировании.

Уравнения равновесия для этой задачи относительно векторов перемещения и поворота получим, используя (1.20):

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - (\mu + \alpha) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \vec{\omega} &= 0, \\ (\beta + 2\gamma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\omega} + 2\alpha \operatorname{rot} \vec{u} - 4\alpha \vec{\omega} &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В силу симметрии решение задачи будем искать в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) в виде:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\rho, \varphi) &= \{F(\rho) + U(\rho) \cos(2\varphi), V(\rho) \sin(2\varphi), 0\}, \\ \vec{\omega}(\rho, \varphi) &= \{0, 0, \omega(\rho) \sin(2\varphi)\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Граничные условия для компонент тензоров напряжения и моментного напряжения в соответствии с нагрузкой на бесконечности и отсутствием таковой на контуре примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}|_{\rho=R_0} &= 0, \quad \sigma_{\rho\varphi}|_{\rho=R_0} = 0, \quad \mu_{\rho z}|_{\rho=R_0} = 0, \\ \sigma_{\rho\rho}|_{\rho \rightarrow \infty} &= p_\rho, \quad \sigma_{\rho\varphi}|_{\rho \rightarrow \infty} = p_\varphi, \quad \mu_{\rho z}|_{\rho \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Вектор перемещения и компоненты тензора напряжений, соответствующие решению данной задачи в рамках симметричной теории упругости, а также вектор поворота, найденный по соотноше-

нию (1.21), примут вид:

$$\begin{aligned}
u_{\rho}^*(\rho, \varphi) &= \left(C_1^* \rho + \frac{C_2^*}{\rho} \right) + \left(\frac{C_3^*}{\rho^3} + \frac{C_4^*}{\rho} + C_5^* \rho \right) \cos(2\varphi), \\
u_{\varphi}^*(\rho, \varphi) &= \left(\frac{C_3^*}{\rho^3} - C_4^* \frac{\kappa - 1}{(\kappa + 1)\rho} - C_5^* \rho \right) \sin(2\varphi), \\
\omega_z^*(\rho, \varphi) &= \frac{C_4^*}{\rho^2} \sin(2\varphi), \\
\sigma_{\rho\rho}^*(\rho, \varphi) &= \left(\frac{4C_1^*}{\kappa - 1} - \frac{2C_2^*}{\rho^2} \right) + \left(-C_3^* \frac{6}{\rho^4} - \frac{8C_4^*}{(\kappa + 1)\rho^2} + 2C_5^* \right) \cos(2\varphi), \\
\sigma_{\rho\varphi}^*(\rho, \varphi) &= \left(-C_3^* \frac{6}{\rho^4} - C_4^* \frac{4}{(\kappa + 1)\rho^2} - 2C_5^* \right) \sin(2\varphi), \\
\sigma_{\varphi\rho}^*(\rho, \varphi) &= \sigma_{\rho\varphi}^*(\rho, \varphi), \\
\sigma_{\varphi\varphi}^*(\rho, \varphi) &= \left(C_1^* \frac{4}{\kappa - 1} + \frac{2C_2^*}{\rho^2} \right) + \left(C_3^* \frac{6}{\rho^4} - 2C_5^* \right) \cos(2\varphi), \\
D^* &= \left| \frac{u_{\rho}^*(R_0, 0)}{u_{\rho}^*(R_0, \frac{\pi}{2})} \right|,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

где [29]:

$$\begin{aligned}
C_1^* &= \frac{p(\kappa - 1)}{8}, & C_2^* &= \frac{pR_0^2}{4}, & C_3^* &= -\frac{pR_0^4}{4}, \\
C_4^* &= \frac{pR_0^2(\kappa + 1)}{4}, & C_5^* &= \frac{p}{4}, & C_6^* &= 0.
\end{aligned}$$

Безразмерная величина $\kappa = \frac{3\mu + \lambda}{\mu + \lambda}$, D - макровеличина, характеризующая степень искажения контура кругового отверстия от действия одноосной нагрузки. Отметим, что эта величина может быть экспериментально измерена.

5.1. Решение в рамках среды Коссера Подставляя вектор перемещений и поворота (5.2) в (5.1), получим уравнения равновесия в виде системы линейных дифференциальных уравнений второго

порядка относительно функций $F(\rho)$, $U(\rho)$, $V(\rho)$, $\omega(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}U(\rho) + \frac{A_{11}}{\rho^2}U(\rho) + \frac{A_{12}}{\rho}\frac{d}{d\rho}V(\rho) + \\ + \frac{A_{13}}{\rho^2}V(\rho) - \frac{A_{14}}{\rho}\omega(\rho) = 0, \\ \frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}V(\rho) + \frac{A_{21}}{\rho^2}V(\rho) + \frac{A_{22}}{\rho}\frac{d}{d\rho}U(\rho) + \\ + \frac{A_{23}}{\rho^2}U(\rho) + A_{24}\frac{d}{d\rho}\omega(\rho) = 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2}\omega(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\omega(\rho) - 4A_{31}\omega(\rho) - \frac{4}{\rho^2}\omega(\rho) + 2A_{31}\frac{d}{d\rho}V(\rho) + \\ + \frac{2A_{31}}{\rho}V(\rho) + \frac{4A_{31}}{\rho}U(\rho) = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2}F(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}F(\rho) - \frac{1}{\rho^2}F(\rho) = 0.$$

Коэффициенты определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} A_{11} = -\frac{\lambda + 6\mu + 4\alpha}{\lambda + 2\mu}, \quad A_{12} = -2\frac{\alpha - \lambda - \mu}{\lambda + 2\mu}, \quad A_{13} = -2\frac{\lambda + 3\mu + \alpha}{\lambda + 2\mu}, \\ A_{14} = -\frac{4\alpha}{\lambda + 2\mu}, \quad A_{21} = -\frac{4\lambda + 9\mu + \alpha}{\alpha + \mu}, \quad A_{22} = 2\frac{\alpha - \lambda - \mu}{\alpha + \mu}, \\ A_{23} = -2\frac{\lambda + 3\mu + \alpha}{\alpha + \mu}, \quad A_{24} = -\frac{2\alpha}{\alpha + \mu}, \quad A_{31} = \frac{\alpha}{\gamma + \varepsilon}. \end{aligned}$$

Общее решение системы уравнений (5.5) имеет вид:

$$\begin{aligned} F(\rho) = C_1F_1(\rho) + C_2F_2(\rho), \\ U(\rho) = \sum_{i=3}^8 C_iU_i(\rho), \quad V(\rho) = \sum_{i=3}^8 C_iV_i(\rho), \quad \omega(\rho) = \sum_{i=3}^8 C_i\omega_i(\rho). \end{aligned}$$

где $F_i(\rho)$, $U_i(\rho)$, $V_i(\rho)$, $\omega_i(\rho)$, ($i = 3, \dots, 8$) - частные решения системы (5.5), а C_i - произвольные постоянные, определяемые из краевых условий (5.3).

В качестве $F_1(\rho)$, $F_2(\rho)$, $U_3(\rho)$, $V_3(\rho)$, $U_4(\rho)$, $V_4(\rho)$, $U_5(\rho)$, $V_5(\rho)$, $U_6(\rho)$, $V_6(\rho)$, были использованы частные решения, соответствующие классической теории упругости:

$$F_1(\rho) = \rho, \quad F_2(\rho) = \frac{1}{\rho}. \quad (5.6)$$

$$U_3(\rho) = \frac{1}{\rho^3}, \quad U_4(\rho) = \frac{1}{\rho}, \quad U_5(\rho) = \rho, \quad U_6(\rho) = \rho^3. \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} V_3(\rho) &= \frac{1}{\rho^3}, & V_4(\rho) &= -\frac{\mu}{(2\mu + \lambda)\rho}, \\ V_5(\rho) &= -\rho, & V_6(\rho) &= -\frac{3\mu + 2\lambda}{\lambda}\rho^3. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Функции $\omega_3(\rho)$, $\omega_4(\rho)$, $\omega_5(\rho)$, $\omega_6(\rho)$ получены с использованием соотношения (1.21):

$$\omega_3(\rho) = 0, \quad \omega_4(\rho) = \frac{1}{\rho^2}, \quad \omega_5(\rho) = 0, \quad \omega_6(\rho) = -3\frac{2\mu + \lambda}{\lambda}\rho^2 \quad (5.9)$$

Остальные "моментные" частные решения получим путём непосредственного решения системы (5.5).

Уравнением равновесия для старшей гармоники векторов перемещения и поворота является система дифференциальных уравнений второго порядка (5.5.1)-(5.5.3) относительно неизвестных функций $U(\rho)$, $V(\rho)$, $\omega(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) &= -\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}U(\rho) - \frac{A_{11}}{\rho^2}U(\rho) - \frac{A_{12}}{\rho}\frac{d}{d\rho}V(\rho) - \frac{A_{13}}{\rho^2}V(\rho) + \\ &\quad + \frac{A_{14}}{\rho}\omega(\rho), \\ \frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho) &= -\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}V(\rho) - \frac{A_{21}}{\rho^2}V(\rho) - \frac{A_{22}}{\rho}\frac{d}{d\rho}U(\rho) - \\ &\quad - \frac{A_{23}}{\rho^2}U(\rho) - A_{24}\frac{d}{d\rho}\omega(\rho), \\ \frac{d^2}{d\rho^2}\omega(\rho) &= -\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\omega(\rho) + 4A_{31}\omega(\rho) + \frac{4}{\rho^2}\omega(\rho) - 2A_{31}\frac{d}{d\rho}V(\rho) - \\ &\quad - \frac{2A_{31}}{\rho}V(\rho) - \frac{4A_{31}}{\rho}U(\rho). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Как и в предыдущей задаче, будем искать решение системы уравнений (5.10) в три этапа. На первом этапе повысим порядок, исключив из системы неизвестную функцию $V(\rho)$ и получив тем самым систему уравнений четвёртого порядка. На втором этапе повысим порядок до шестого. На третьем этапе будем последовательно понижать порядок полученного уравнения с использованием ранее найденных частных решений и определим тем самым последние "моментные" частные решения.

Исключим переменную $V(\rho)$. Для этого продифференцируем уравнение (5.10.1), заменив в нем вторую производную по V значением, взятым из (5.10.2). Получим уравнение третьего порядка относительно $U(\rho)$, после чего перепишем его и (5.10.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{A_{12}}{\rho} \frac{d}{d\rho} V(\rho) + \frac{A_{13}}{\rho^2} V(\rho) &= -\frac{d^2}{d\rho^2} U(\rho) - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} U(\rho) - \\ &\quad - \frac{A_{11}}{\rho^2} U(\rho) + \frac{A_{14}}{\rho} \omega(\rho), \\ \frac{A_{13} - 2A_{12}}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} V(\rho) + \frac{-A_{12}A_{21} - 2A_{13}}{\rho^3} V(\rho) &= -\frac{d^3}{d\rho^3} U(\rho) - \\ -\frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} U(\rho) + \frac{1 - A_{11} + A_{12}A_{22}}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} U(\rho) + \frac{A_{12}A_{23} + 2A_{11}}{\rho^3} U(\rho) + \\ + \frac{A_{12}A_{24} + A_{14}}{\rho} \frac{d}{d\rho} \omega(\rho) - \frac{A_{14}}{\rho^2} \omega(\rho). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Представляя (5.11) как систему линейных алгебраических уравнений, разрешим её относительно символов $V(\rho)$ и $\frac{d}{d\rho} V(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} V(\rho) &= -\frac{B_{11}\rho^2}{8} \frac{d^3}{d\rho^3} U(\rho) - \frac{B_{12}\rho}{4} \frac{d^2}{d\rho^2} U(\rho) - \frac{B_{13}}{8} \frac{d}{d\rho} U(\rho) + \\ &\quad + \frac{9B_{14}}{8\rho} U(\rho) + B_{15}\omega(\rho) + \frac{B_{16}\rho}{2} \frac{d}{d\rho} \omega(\rho), \\ V(\rho) &= -\frac{B_{21}\rho^3}{8} \frac{d^3}{d\rho^3} U(\rho) - \frac{B_{22}\rho^2}{4} \frac{d^2}{d\rho^2} U(\rho) + \frac{B_{23}\rho}{8} \frac{d}{d\rho} U(\rho) - \\ &\quad - \frac{B_{24}}{8} U(\rho) - B_{25}\rho\omega(\rho) - \frac{B_{26}\rho^2}{2} \frac{d}{d\rho} \omega(\rho). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Для примера приведём вид констант в соотношении для $V(\rho)$:

$$\begin{aligned} B_{21} &= \frac{(\mu + \alpha)(\mu - \alpha + \lambda)}{(\lambda + 2\mu)(\lambda - 2\alpha)}, \\ B_{22} &= \frac{(\mu + \alpha)(3\mu - \alpha + 2\lambda)}{(\lambda + 2\mu)(\lambda - 2\alpha)}, \\ B_{23} &= -\frac{4\lambda^2 + 5\mu\lambda - 11\lambda\alpha + 9\alpha^2 - 4\alpha\mu + 3\mu^2}{(\lambda + 2\mu)(\lambda - 2\alpha)}, \\ B_{24} &= -\frac{(3\mu + \alpha + \lambda)(\mu + 9\alpha - 4\lambda)}{(\lambda + 2\mu)(\lambda - 2\alpha)}, \\ B_{25} &= \frac{\alpha(\mu + \alpha)}{(\lambda + 2\mu)(\lambda - 2\alpha)}, \\ B_{26} &= \frac{\alpha(\mu - \alpha + \lambda)}{(\lambda + 2\mu)(\lambda - 2\alpha)}. \end{aligned}$$

Дважды дифференцируем (5.10.1), каждый раз заменяя выражения для $\frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho)$, $\frac{d}{d\rho}V(\rho)$, $V(\rho)$, $\frac{d^2}{d\rho^2}\omega(\rho)$ на значения, взятые из (5.10.2)-(5.10.3), и (5.12), в результате получим уравнение четвёртого порядка относительно $U(\rho)$. Добавляем к нему уравнение (5.10.3), в которое также подставлены выражения (5.12), получим систему однородных линейных дифференциальных уравнений четвёртого порядка с двумя неизвестными функциями:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{d\rho^4}U(\rho) = & \left(2C_{11}\rho - \frac{6}{\rho}\right) \frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) - \left(C_{12} - \frac{3}{\rho^2}\right) \frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) - \\ & - \left(\frac{6C_{13}}{\rho} - \frac{9}{\rho^3}\right) \frac{d}{d\rho}U(\rho) + \left(\frac{6C_{13}}{\rho^2} - \frac{9}{\rho^4}\right) U(\rho) + \\ & + 8C_{15} \frac{d}{d\rho}\omega(\rho) - \frac{16C_{14}}{\rho}\omega(\rho), \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2}\omega(\rho) = & - \left(2C_{11}\rho + \frac{1}{\rho}\right) \frac{d}{d\rho}\omega(\rho) + \left(4C_{25} + \frac{4}{\rho^2}\right) \omega(\rho) + \\ & + \frac{C_{21}\rho^2}{2} \frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) + C_{22}\rho \frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + \frac{3C_{23}}{2} \frac{d}{d\rho}U(\rho) - \\ & - \frac{3C_{23}}{2\rho}U(\rho). \end{aligned}$$

Коэффициенты данных уравнений определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{\alpha^2}{(2\alpha - \lambda)(\gamma + \varepsilon)}, & C_{12} &= -\frac{4\alpha^2(\lambda + 3\mu + \alpha)}{(2\alpha - \lambda)(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}, \\ C_{13} &= -\frac{\alpha^2(2\lambda - 3\alpha + \mu)}{(2\alpha - \lambda)(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}, & C_{14} &= \frac{\alpha^2(\alpha - \lambda)}{(2\alpha - \lambda)(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}, \\ C_{15} &= \frac{\alpha^3}{(2\alpha - \lambda)(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}, & C_{21} &= -\frac{\alpha(\mu + \alpha)}{(2\alpha - \lambda)(\gamma + \varepsilon)}, \\ C_{22} &= -\frac{\alpha(3\mu + \alpha + \lambda)}{(2\alpha - \lambda)(\gamma + \varepsilon)}, & C_{23} &= -\frac{\alpha(\mu - 3\alpha + 2\lambda)}{(2\alpha - \lambda)(\gamma + \varepsilon)}, \\ C_{25} &= \frac{\alpha(\alpha - \lambda)}{(2\alpha - \lambda)(\gamma + \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Снова выполним процедуру повышения порядка, исключив из (5.13) функцию $\omega(\rho)$ и сведя его к уравнению шестого порядка. Процедура

аналогична описаной ранее, поэтому приведём только результат:

$$\begin{aligned}
\omega(\rho) = & \frac{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}{32\alpha\lambda} \rho^2 \frac{d^5}{d\rho^5} U(\rho) - \\
& - \frac{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)(2\lambda - 9\alpha)}{32\alpha^2\lambda} \rho \frac{d^4}{d\rho^4} U(\rho) - \\
& - \left(\frac{\mu}{8\lambda} \rho^2 + \frac{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)(12\lambda - 9\alpha)}{32\alpha^2\lambda} \right) \frac{d^3}{d\rho^3} U(\rho) + \\
& + \left(-\frac{3\mu + \lambda}{4\lambda} \rho + \frac{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)(3\lambda - 6\alpha)}{16\alpha^2\lambda\rho} \right) \frac{d^2}{d\rho^2} U(\rho) + \\
& + \left(-3\frac{\mu + 2\lambda}{8\lambda} + \frac{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)(18\lambda + 9\alpha)}{32\alpha^2\lambda\rho^2} \right) \frac{d}{d\rho} U(\rho) + \\
& + \left(3\frac{\mu + 2\lambda}{8\lambda\rho} - \frac{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)(18\lambda + 9\alpha)}{32\alpha^2\lambda\rho^3} \right) U(\rho).
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Уравнение шестого порядка:

$$\begin{aligned}
\frac{d^6}{d\rho^6} U(\rho) + \frac{9}{\rho} \frac{d^5}{d\rho^5} U(\rho) - G \frac{d^4}{d\rho^4} U(\rho) - \left(\frac{6G}{\rho} + \frac{30}{\rho^3} \right) \frac{d^3}{d\rho^3} U(\rho) + \\
+ \left(\frac{3G}{\rho^2} + \frac{45}{\rho^4} \right) \frac{d^2}{d\rho^2} U(\rho) + \left(\frac{9G}{\rho^3} - \frac{45}{\rho^5} \right) \frac{d}{d\rho} U(\rho) - \\
- \left(\frac{9G}{\rho^4} - \frac{45}{\rho^6} \right) U(\rho) = 0, \\
G = \frac{4\alpha\mu}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Характеристическое уравнение:

$$(q + 1) \cdot (q - 1)^2 \cdot (q + 3) \cdot (q - 3) \cdot (q - 5) = 0.$$

Как и ранее, характеристическое уравнение даёт нам кратные корни, поэтому, используя процедуру (3.10)-(3.11) и классические частные решения (5.7), будем последовательно понижать порядок уравнения (5.15).

Уравнение пятого порядка:

$$\begin{aligned}
\frac{d^5}{d\rho^5} F(\rho) - \frac{15}{\rho} \frac{d^4}{d\rho^4} F(\rho) - \left(G - \frac{45}{\rho^2} \right) \frac{d^3}{d\rho^3} F(\rho) - \left(\frac{10G}{\rho} + \frac{30}{\rho^3} \right) \frac{d^2}{d\rho^2} F(\rho) - \\
- \left(\frac{15G}{\rho^2} + \frac{45}{\rho^4} \right) \frac{d}{d\rho} F(\rho) + \left(\frac{15G}{\rho^3} + \frac{45}{\rho^5} \right) F(\rho) = 0.
\end{aligned}$$

Используя выражение (3.10), можно определить частные решения полученного уравнения:

$$F_2(\rho) = \frac{1}{\rho^3}, \quad F_3(\rho) = \rho, \quad F_4(\rho) = \frac{1}{\rho^5}.$$

Для получения уравнения четвёртого порядка используем $F_2(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{d\rho^4}H(\rho) - \left(G + \frac{15}{\rho^2}\right) \frac{d^2}{d\rho^2}H(\rho) - \left(\frac{G}{\rho} - \frac{45}{\rho^3}\right) \frac{d}{d\rho}H(\rho) + \\ + \left(\frac{9G}{\rho^2} - \frac{45}{\rho^4}\right) H(\rho) = 0. \end{aligned}$$

Два частных решения этого уравнения:

$$H_3(\rho) = \rho^3, \quad H_4(\rho) = \frac{1}{\rho}.$$

Для получения уравнения третьего порядка используем $H_3(\rho)$:

$$\frac{d^3}{d\rho^3}J(\rho) + \frac{12}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2}J(\rho) - \left(G - \frac{21}{\rho^2}\right) \frac{d}{d\rho}J(\rho) - \left(\frac{7G}{\rho} + \frac{21}{\rho^3}\right) J(\rho) = 0.$$

Частное решение этого уравнения:

$$J_4(\rho) = \frac{1}{r^7}.$$

И, наконец, используя последнее частное решение J_4 , получим уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2}{d\rho^2}M(\rho) - \frac{9}{\rho} \frac{d}{d\rho}M(\rho) - \left(G - \frac{21}{\rho^2}\right) M(\rho) = 0.$$

Как и в предыдущей задаче, данное уравнение имеет два частных решения, записанных через модифицированные функции Бесселя первого (3.13) и второго (3.14) рода второго порядка [13];

$$\begin{aligned} M_1(\rho) &= \rho^5 I_2(\sqrt{G}\rho), \\ M_2(\rho) &= \rho^5 K_2(\sqrt{G}\rho). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Используя правила (3.15) и (3.16), а также (3.10), два раза проинтегрируем частные решения (5.16) и получим оставшиеся "моментные" частные решения уравнения шестого порядка (5.15):

$$\begin{aligned} U_7(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho} I_0(2A\rho) - \frac{1}{A^3\rho^2} I_1(2A\rho), \\ U_8(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho} K_0(2A\rho) + \frac{1}{A^3\rho^2} K_1(2A\rho). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Для отыскания компонент вектора поворота воспользуемся соотношением (5.14):

$$\begin{aligned}\omega_7(\rho) &= -BI_0(2A\rho) + \frac{B}{A\rho}I_1(2A\rho), \\ \omega_8(\rho) &= -BK_0(2A\rho) - \frac{B}{A\rho}K_1(2A\rho).\end{aligned}\tag{5.18}$$

Для отыскания оставшейся компоненты вектора перемещения используем соотношение (5.12.2):

$$\begin{aligned}V_7(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho}I_0(2A\rho) - \frac{1 + A^2\rho^2}{A^3\rho^2}I_1(2A\rho), \\ V_8(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho}K_0(2A\rho) + \frac{1 + A^2\rho^2}{A^3\rho^2}K_1(2A\rho).\end{aligned}\tag{5.19}$$

Выражения (5.17)-(5.19) являются двумя частными "моментными" решениями системы (5.10), в чём можно убедиться подстановкой.

Общее решение данной задачи можно записать в виде:

$$\begin{aligned}u_\rho(\rho, \varphi) &= (C_1F_1(\rho) + C_2F_2(\rho)) + \cos(2\varphi) \sum_{i=3}^8 C_iU_i(\rho), \\ u_\varphi(\rho, \varphi) &= \sin(2\varphi) \sum_{i=3}^8 C_iV_i(\rho), \\ \omega_z(\rho, \varphi) &= \sin(2\varphi) \sum_{i=3}^8 C_i\omega_i(\rho).\end{aligned}$$

Подставим сюда соотношения (5.6), (5.7)-(5.9), (5.17)-(5.19).

Для отыскания компонент тензора напряжений воспользуемся соотношениями (1.33), а для компонент тензора моментных напряжений - соотношениями (1.35).

С точки зрения удобства анализа получаемых решений все величины приведём к безразмерному виду. Пусть радиус внутреннего контура R_0 является характерным геометрическим размером. Обозначим символом $\hat{\cdot}$ размерные величины, которые связаны с безразмерными следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\hat{u}_i &= R_0u_i, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \mu\sigma_{ij}, \quad \hat{\mu}_{ij} = R_0\mu\mu_{ij}, \quad \hat{\rho} = R_0\rho, \quad \hat{C}_2 = R_0^2C_2, \\ \hat{C}_3 &= R_0^4C_3, \quad \hat{C}_4 = R_0^2C_4, \quad \hat{C}_6 = \frac{C_6}{R_0^2}, \quad \hat{C}_7 = \frac{C_7}{R_0^4}.\end{aligned}$$

Используем также ранее введённые (1.18) безразмерные величины A, B, C . Тогда окончательный вид решения запишем так:

$$\begin{aligned}
u_\rho(\rho, \varphi) &= \left(C_1 \rho + \frac{C_2}{\rho^2} \right) + \left(\frac{C_3}{\rho^3} + \frac{C_4}{\rho} + C_5 \rho + C_6 \rho^3 + \right. \\
&\quad \left. + C_7 U_7(\rho) + C_8 U_8(\rho) \right) \cos(2\varphi), \\
u_\varphi(\rho, \varphi) &= \left(\frac{C_3}{\rho^3} - C_4 \frac{\kappa - 1}{(\kappa + 1)\rho} - C_5 \rho - C_6 \frac{\kappa + 3}{\kappa - 3} \rho^3 + \right. \\
&\quad \left. + C_7 V_7(\rho) + C_8 V_8(\rho) \right) \sin(2\varphi), \\
\omega_z(\rho, \varphi) &= \left(\frac{C_4}{\rho^2} - C_6 \frac{3(\kappa + 1)}{3 - \kappa} \rho^2 + C_7 \omega_7(\rho) + C_8 \omega_8(\rho) \right) \sin(2\varphi), \\
\sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi) &= \left(C_1 \frac{4}{\kappa - 1} - \frac{2C_2}{\rho^2} \right) + \left(-C_3 \frac{6}{\rho^4} - C_4 \frac{8}{(\kappa + 1)\rho^2} + 2C_5 + \right. \\
&\quad \left. + C_7 S_{\rho\rho}^{(7)}(\rho) + C_8 S_{\rho\rho}^{(8)}(\rho) \right) \cos(2\varphi), \\
\sigma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) &= \left(-C_3 \frac{6}{\rho^4} - C_4 \frac{4}{(\kappa + 1)\rho^2} - 2C_5 - C_6 \frac{12}{3 - \kappa} \rho^2 + \right. \\
&\quad \left. + C_7 S_{\rho\varphi}^{(7)}(\rho) + C_8 S_{\rho\varphi}^{(8)}(\rho) \right) \sin(2\varphi), \\
\sigma_{\varphi\rho}(\rho, \varphi) &= \left(-C_3 \frac{6}{\rho^4} - C_4 \frac{4}{(\kappa + 1)\rho^2} - 2C_5 - C_6 \frac{12}{3 - \kappa} \rho^2 + \right. \\
&\quad \left. + C_7 S_{\varphi\rho}^{(7)}(\rho) + C_8 S_{\varphi\rho}^{(8)}(\rho) \right) \sin(2\varphi), \\
\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) &= \left(C_1 \frac{4}{\kappa - 1} + \frac{2C_2}{\rho^2} \right) + \left(C_3 \frac{6}{\rho^4} - 2C_5 - C_6 \frac{24}{3 - \kappa} \rho^2 + \right. \\
&\quad \left. + C_7 S_{\varphi\varphi}^{(7)}(\rho) + C_8 S_{\varphi\varphi}^{(8)}(\rho) \right) \cos(2\varphi), \\
\mu_{\rho z}(\rho, \varphi) &= \left(-C_4 \frac{2}{A^2 B \rho^3} - C_6 \frac{6(\kappa + 1)}{(3 - \kappa) A^2 B} \rho + \right. \\
&\quad \left. + C_7 M_{\rho z}^{(7)}(\rho) + C_8 M_{\rho z}^{(8)}(\rho) \right) \sin(2\varphi), \\
\mu_{\varphi z}(\rho, \varphi) &= \left(C_4 \frac{2}{A^2 B \rho^3} - C_6 \frac{6(\kappa + 1)}{(3 - \kappa) A^2 B} \rho + \right. \\
&\quad \left. + C_7 M_{\varphi z}^{(7)}(\rho) + C_8 M_{\varphi z}^{(8)}(\rho) \right) \cos(2\varphi), \\
\mu_{z\rho}(\rho, \varphi) &= C \mu_{\rho z}(\rho, \varphi), \\
\mu_{z\varphi}(\rho, \varphi) &= C \mu_{\varphi z}(\rho, \varphi), \\
D &= \left| \frac{u_\rho(R_0, 0)}{u_\rho(R_0, \frac{\pi}{2})} \right|.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Функции от ρ , стоящие при константах C_7 и C_8 в выражении (5.20), определяются соответствующими "моментными" частными решени-

ями и имеют вид:

$$\begin{aligned}
U_7(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho}I_0(2A\rho) - \frac{1}{A^3\rho^2}I_1(2A\rho), \\
U_8(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho}K_0(2A\rho) + \frac{1}{A^3\rho^2}K_1(2A\rho), \\
V_7(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho}I_0(2A\rho) - \frac{1+A^2\rho^2}{A^3\rho^2}I_1(2A\rho), \\
V_8(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho}K_0(2A\rho) + \frac{1+A^2\rho^2}{A^3\rho^2}K_1(2A\rho), \\
\omega_7(\rho) &= -BI_0(2A\rho) + \frac{B}{A\rho}I_1(2A\rho), \\
\omega_8(\rho) &= -BK_0(2A\rho) - \frac{B}{A\rho}K_1(2A\rho), \\
S_{\rho\rho}^{(7)}(\rho) &= -\frac{6}{A^2\rho^2}I_0(2A\rho) + \frac{6+4A^2\rho^2}{A^3\rho^3}I_1(2A\rho), \\
S_{\rho\rho}^{(8)}(\rho) &= -\frac{6}{A^2\rho^2}K_0(2A\rho) - \frac{6+4A^2\rho^2}{A^3\rho^3}K_1(2A\rho), \\
S_{\rho\varphi}^{(7)}(\rho) &= -\frac{6}{A^2\rho^2}I_0(2A\rho) + \frac{6+2A^2\rho^2}{A^3\rho^3}I_1(2A\rho), \\
S_{\rho\varphi}^{(8)}(\rho) &= -\frac{6}{A^2\rho^2}K_0(2A\rho) - \frac{6+2A^2\rho^2}{A^3\rho^3}K_1(2A\rho), \\
S_{\varphi\rho}^{(7)}(\rho) &= -\frac{6+4A^2\rho^2}{A^2\rho^2}I_0(2A\rho) + \frac{6+6A^2\rho^2}{A^3\rho^3}I_1(2A\rho), \\
S_{\varphi\rho}^{(8)}(\rho) &= -\frac{6+4A^2\rho^2}{A^2\rho^2}K_0(2A\rho) - \frac{6+6A^2\rho^2}{A^3\rho^3}K_1(2A\rho), \\
S_{\varphi\varphi}^{(7)}(\rho) &= \frac{6}{A^2\rho^2}I_0(2A\rho) - \frac{6+4A^2\rho^2}{A^3\rho^3}I_1(2A\rho), \\
S_{\varphi\varphi}^{(8)}(\rho) &= \frac{6}{A^2\rho^2}K_0(2A\rho) + \frac{6+4A^2\rho^2}{A^3\rho^3}K_1(2A\rho), \\
M_{\rho z}^{(7)}(\rho) &= \frac{2}{A^2\rho}I_0(2A\rho) - \frac{2+2A^2\rho^2}{A^3\rho^2}I_1(2A\rho), \\
M_{\rho z}^{(8)}(\rho) &= \frac{2}{A^2\rho}K_0(2A\rho) + \frac{2+2A^2\rho^2}{A^3\rho^2}K_1(2A\rho), \\
M_{\varphi z}^{(7)}(\rho) &= -\frac{2}{A^2\rho}I_0(2A\rho) + \frac{2}{A^3\rho^2}I_1(2A\rho), \\
M_{\varphi z}^{(8)}(\rho) &= -\frac{2}{A^2\rho}K_0(2A\rho) - \frac{2}{A^3\rho^2}K_1(2A\rho).
\end{aligned}$$

Используя граничные условия (5.3), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно констант C_1, \dots, C_8 , причём

$R_1 \rightarrow \infty$:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{\kappa-1} & -\frac{2}{R_0^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{R_0^4} & -\frac{8}{(\kappa+1)R_0^2} & 2 & 0 & S_{\rho\rho}^{(7)}(R_0) & S_{\rho\rho}^{(8)}(R_0) \\ 0 & 0 & -\frac{6}{R_0^4} & -\frac{4}{(\kappa+1)R_0^2} & -2 & -\frac{12R_0^2}{3-\kappa} & S_{\rho\varphi}^{(7)}(R_0) & S_{\rho\varphi}^{(8)}(R_0) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{A^2BR_0^3} & 0 & -\frac{6(\kappa+1)R_0^2}{(3-\kappa)A^2B} & M_{\rho z}^{(7)}(R_0) & M_{\rho z}^{(8)}(R_0) \\ \frac{4}{\kappa-1} & -\frac{2}{R_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{R_1^4} & -\frac{8}{(\kappa+1)R_1^2} & 2 & 0 & S_{\rho\rho}^{(7)}(R_1) & S_{\rho\rho}^{(8)}(R_1) \\ 0 & 0 & -\frac{6}{R_1^4} & -\frac{4}{(\kappa+1)R_1^2} & -2 & -\frac{12R_1^2}{3-\kappa} & S_{\rho\varphi}^{(7)}(R_1) & S_{\rho\varphi}^{(8)}(R_1) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{A^2BR_1^3} & 0 & -\frac{6(\kappa+1)R_1^2}{(3-\kappa)A^2B} & M_{\rho z}^{(7)}(R_1) & M_{\rho z}^{(8)}(R_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} \\ -\frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение данной системы можно записать в виде:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{p(\kappa-1)}{8}, \quad C_2 = \frac{pR_0^2}{4}, \\ C_3 &= -\frac{pR_0^4}{4} \cdot \left(\frac{2L(BL^2 + 4\kappa + 4)K_0(L)}{L^2(2BLK_0(L) + (BL^2 + 4B + 2\kappa + 2)K_1(L))} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(BL^4 + 4BL^2 + 2L^2 + 2L^2\kappa + 16\kappa + 16)K_1(L)}{L^2(2BLK_0(L) + (BL^2 + 4B + 2\kappa + 2)K_1(L))} \right), \\ C_4 &= \frac{pR_0^2(\kappa+1)}{4} \cdot \frac{B(2LK_0(L) + (4 + L^2)K_1(L))}{2BLK_0(L) + (BL^2 + 4B + 2\kappa + 2)K_1(L)}, \\ C_5 &= \frac{p}{4}, \quad C_6 = 0, \quad C_7 = 0, \\ C_8 &= \frac{p(\kappa+1)L}{2(2BLK_0(L) + (BL^2 + 4B + 2\kappa + 2)K_1(L))}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Здесь для сокращения записи введена безразмерная величина $L = 2AR_0$.

5.2. Решение в рамках среды псевдокоссера Аналогично, подставляя вектор перемещений (5.2) в (1.23), получим уравнения равновесия для среды псевдокоссера в виде системы линейных диффе-

ренциальных уравнений относительно функций $F(\rho)$, $U(\rho)$, $V(\rho)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^3}{d\rho^3}V(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho) + \left(4B_1 - \frac{5}{\rho^2}\right) \frac{d}{d\rho}V(\rho) + \\
& + \left(4\frac{B_3}{\rho} + \frac{3}{\rho^3}\right) V(\rho) + \left(2B_2\rho + \frac{2}{\rho}\right) \frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + \\
& + \left(2B_2 - \frac{2}{\rho^2}\right) \frac{d}{d\rho}U(\rho) - \left(2\frac{B_4}{\rho} + \frac{6}{\rho^3}\right) U(\rho) = 0, \\
& \frac{d^4}{d\rho^4}V(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{d^3}{d\rho^3}V(\rho) - \left(4B_5 + \frac{7}{\rho^2}\right) \frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho) - \quad (5.22) \\
& - \left(4\frac{B_5}{\rho} - \frac{7}{\rho^3}\right) \frac{d}{d\rho}V(\rho) + \left(4\frac{B_6}{\rho^2} + \frac{9}{\rho^4}\right) V(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) - \\
& - \frac{4}{\rho^2} \frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + \left(8\frac{B_1}{\rho} + \frac{2}{\rho^3}\right) \frac{d}{d\rho}U(\rho) + \left(8\frac{B_3}{\rho^2} + \frac{18}{\rho^4}\right) U(\rho) = 0, \\
& \frac{d^2}{d\rho^2}F(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}F(\rho) - \frac{1}{\rho^2}F(\rho) = 0.
\end{aligned}$$

Коэффициенты данной системы определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\lambda + \mu}{\gamma + \varepsilon}, & B_2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\gamma + \varepsilon}, & B_3 &= \frac{\lambda + 3\mu}{\gamma + \varepsilon}, \\
B_4 &= \frac{\lambda + 6\mu}{\gamma + \varepsilon}, & B_5 &= \frac{\mu}{\gamma + \varepsilon}, & B_6 &= \frac{4\lambda + 9\mu}{\gamma + \varepsilon}.
\end{aligned}$$

Решение системы уравнений (5.22) описывается соотношениями (5.20)-(5.21) при $B = 1$ (1.18).

Глава 6.

Построение точного аналитического решения для тела вращения в рамках среды Коссера

Основываясь на точных решениях, полученных в предыдущих главах, проведём некоторое обобщение. А именно, построим точное аналитическое решение для тела вращения.

Уравнения равновесия для тела вращения относительно векторов перемещения и поворота запишем, исключив из (1.20) векторы массовых сил и моментов:

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - (\mu + \alpha) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \vec{\omega} &= 0, \quad (6.1) \\(\beta + 2\gamma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\omega} - (\gamma + \varepsilon) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\omega} + 2\alpha \operatorname{rot} \vec{u} - 4\alpha \vec{\omega} &= 0.\end{aligned}$$

Предполагается, что напряжённо-деформированное состояние такого тела в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) зависит только от координат ρ и φ . Данный класс задач характеризуется тем, что решение для него можно представить в виде отрезка ряда

Фурье:

$$\begin{aligned}\vec{u}(\rho, \varphi) &= \{u_\rho(\rho, \varphi), u_\varphi(\rho, \varphi), 0\}, \\ u_\rho(\rho, \varphi) &= U^{(0)}(\rho) + U^{(1)}(\rho) \cos(\varphi) + \sum_{n=2}^N U^{(n)}(\rho) \cos(n\varphi), \\ u_\varphi(\rho, \varphi) &= V^{(0)}(\rho) + V^{(1)}(\rho) \sin(\varphi) + \sum_{n=2}^N V^{(n)}(\rho) \sin(n\varphi),\end{aligned}\quad (6.2)$$

$$\begin{aligned}\vec{\omega}(\rho, \varphi) &= \{0, 0, \omega_z(\rho, \varphi)\}, \\ \omega_z(\rho, \varphi) &= \omega^{(0)}(\rho) + \omega^{(1)}(\rho) \sin(\varphi) + \sum_{n=2}^N \omega^{(n)}(\rho) \sin(n\varphi).\end{aligned}$$

Здесь $\vec{u}(\rho, \varphi)$ - вектор перемещения, $\vec{\omega}(\rho, \varphi)$ - вектор поворота.

Такая форма записи решения будет соответствовать полному отрезку ряда Фурье, если в соотношениях (6.2) $\cos(\cdot)$ заменить на $\sin(\cdot)$, а $\sin(\cdot)$ на $-\cos(\cdot)$. При такой замене разрешающие системы дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье будут в точности соответствовать по виду системам, полученным ниже [24].

Подставляя векторы перемещений и поворота (6.2) в (6.2), получим последовательность систем дифференциальных уравнений относительно функций, представляющих собой коэффициенты Фурье. В силу того, что рассматриваемые области являются телами вращения, системы дифференциальных уравнений относительно каждой гармоники развязаны. Следует отметить, что такая ситуация будет иметь место, если краевые условия представимы рядами, аналогичными (6.2).

Для коэффициентов нулевой гармоники система разрешающих уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\rho^2}U^{(0)}(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}U^{(0)}(\rho) - \frac{1}{\rho^2}U^{(0)}(\rho) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\rho^2}V^{(0)}(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}V^{(0)}(\rho) - \frac{1}{\rho^2}V^{(0)}(\rho) - \frac{2\alpha}{\alpha + \mu}\frac{d}{d\rho}\omega^{(0)}(\rho) &= 0, \\ \frac{d^2}{d\rho^2}\omega^{(0)}(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\omega^{(0)}(\rho) - \frac{4\alpha}{\gamma + \varepsilon}\omega^{(0)}(\rho) + \frac{2\alpha}{\gamma + \varepsilon}\frac{d}{d\rho}V^{(0)}(\rho) &+ \\ + \frac{2\alpha}{(\gamma + \varepsilon)\rho}V^{(0)}(\rho) &= 0.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Для первой гармоники:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{d\rho^2}U^{(1)}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}U^{(1)}(\rho) - \frac{3\mu + \alpha + \lambda}{(2\mu + \lambda)\rho^2}U^{(1)}(\rho) - \\
& - \frac{\alpha - \mu - \lambda}{(2\mu + \lambda)\rho} \frac{d}{d\rho}V^{(1)}(\rho) - \frac{3\mu + \alpha + \lambda}{(2\mu + \lambda)\rho^2}V^{(1)}(\rho) + \frac{2\alpha}{(2\mu + \lambda)\rho}\omega^{(1)}(\rho) = 0, \\
& \frac{d^2}{d\rho^2}V^{(1)}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}V^{(1)}(\rho) - \frac{3\mu + \alpha + \lambda}{(\mu + \alpha)\rho^2}V^{(1)}(\rho) + \\
& + \frac{\alpha - \mu - \lambda}{(\mu + \alpha)\rho} \frac{d}{d\rho}U^{(1)}(\rho) - \frac{3\mu + \alpha + \lambda}{(\mu + \alpha)\rho^2}U^{(1)}(\rho) - \frac{2\alpha}{(\mu + \alpha)} \frac{d}{d\rho}\omega^{(1)}(\rho) = 0, \\
& \frac{d^2}{d\rho^2}\omega^{(1)}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\omega^{(1)}(\rho) - \frac{4\alpha\rho^2 + \gamma + \varepsilon}{(\gamma + \varepsilon)\rho^2}\omega^{(1)}(\rho) + \\
& + \frac{2\alpha}{\gamma + \varepsilon} \frac{d}{d\rho}V^{(1)}(\rho) + \frac{2\alpha}{(\gamma + \varepsilon)\rho}V^{(1)}(\rho) + \frac{2\alpha}{(\gamma + \varepsilon)\rho}U^{(1)}(\rho) = 0.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Для остальных гармоник:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{d\rho^2}U^{(n)}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}U^{(n)}(\rho) - \frac{2\mu + \lambda + \alpha n^2 + \mu n^2}{(\lambda + 2\mu)\rho^2}U^{(n)}(\rho) + \\
& + \frac{n(\lambda - \alpha + \mu)}{(\lambda + 2\mu)\rho} \frac{d}{d\rho}V^{(n)}(\rho) - \frac{n(3\mu + \alpha + \lambda)}{(\lambda + 2\mu)\rho^2}V^{(n)}(\rho) + \\
& + \frac{2n\alpha}{(\lambda + 2\mu)\rho}\omega^{(n)}(\rho) = 0, \\
& \frac{d^2}{d\rho^2}V^{(n)}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}V^{(n)}(\rho) - \frac{\mu + \alpha + 2n^2\mu + n^2\lambda}{(\mu + \alpha)\rho^2}V^{(n)}(\rho) + \\
& + \frac{n(\alpha - \mu - \lambda)}{(\mu + \alpha)\rho} \frac{d}{d\rho}U^{(n)}(\rho) - \frac{n(3\mu + \lambda + \alpha)}{(\mu + \alpha)\rho^2}U^{(n)}(\rho) - \\
& - \frac{2\alpha}{\mu + \alpha} \frac{d}{d\rho}\omega^{(n)}(\rho) = 0, \\
& \frac{d^2}{d\rho^2}\omega^{(n)}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\omega^{(n)}(\rho) - \frac{4\alpha\rho^2 + n^2\gamma + n^2\varepsilon}{(\gamma + \varepsilon)\rho^2}\omega^{(n)}(\rho) + \\
& + \frac{2n\alpha}{(\gamma + \varepsilon)\rho}U^{(n)}(\rho) + \frac{2\alpha}{(\gamma + \varepsilon)} \frac{d}{d\rho}V^{(n)}(\rho) + \frac{2\alpha}{(\gamma + \varepsilon)\rho}V^{(n)}(\rho) = 0.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Первое уравнение системы (6.3) описывает решение классической задачи Ляме [24] и не связано с двумя последующими уравнениями этой системы, которые, в свою очередь, описывают задачу кручения несимметричного упругого материала (гл. 3). Из этого видно, что наипростейшей задачей, на которой уже проявляются "моментные" свойства среды, является задача кручения.

При построении общих решений этих систем будем использовать

известный факт о том, что частные решения соответствующих краевых задач симметричной теории являются частными решениями для краевых задач несимметричной [35].

Для $U^{(0)}(\rho)$ решение известно [24]. В данной работе ему соответствуют соотношения (5.6). Решение для $V^{(0)}(\rho)$ и $\omega^{(0)}(\rho)$ получено в рамках задачи о кручении плоского кольца (3.20) и в данном случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U^{(0)}(\rho) &= C_1^{(0)}\rho + C_2^{(0)}\frac{1}{\rho}, \\ V^{(0)}(\rho) &= C_3^{(0)}\rho + \frac{C_4^{(0)}}{\rho} - C_5^{(0)}\frac{I_1(2A\rho)}{2A^2} - C_6^{(0)}\frac{K_1(2A\rho)}{2A^2}, \\ \omega^{(0)}(\rho) &= C_3^{(0)} - C_5^{(0)}\frac{BI_0(2A\rho)}{2A} + C_6^{(0)}\frac{BK_0(2A\rho)}{2A}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Можно выписать решение для системы (6.4), также полученное ранее в рамках решения задачи о деформировании плоского кольца (4.16):

$$\begin{aligned} U^{(1)}(\rho) &= C_1^{(1)} + \frac{C_2^{(1)}}{\rho^2} + C_3^{(1)}\rho^2 + C_4^{(1)}\ln(\rho) + \\ &\quad + C_5^{(1)}\frac{I_1(2A\rho)}{\rho} + C_6^{(1)}\frac{I_1(2A\rho)}{\rho}, \\ V^{(1)}(\rho) &= -C_1^{(1)} + \frac{C_2^{(1)}}{\rho^2} + C_3^{(1)}\frac{3\lambda + 5\mu}{\mu - \lambda}\rho^2 - \\ &\quad - C_4^{(1)}\left\{\ln(\rho) + \frac{\mu + \lambda}{3\mu + \lambda}\right\} + C_5^{(1)}\left\{\frac{I_1(2A\rho)}{\rho} - 2AI_0(2A\rho)\right\} + \\ &\quad + C_6^{(1)}\left\{\frac{K_1(2A\rho)}{\rho} + 2AK_0(2A\rho)\right\}, \\ w^{(1)}(\rho) &= C_3^{(1)}\frac{8\mu + 4\lambda}{\mu - \lambda}\rho - C_4^{(1)}\frac{2\mu + \lambda}{(3\mu + \lambda)\rho} - \\ &\quad - 2A^2BI_1(2A\rho)C_5^{(1)} - 2A^2BK_1(2A\rho)C_6^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

В выражениях (6.6)-(6.7) и далее вид частных решений, стоящих при коэффициентах $C_1^{(\cdot)}, \dots, C_4^{(\cdot)}$, соответствует симметричной теории упругости, а при $C_5^{(\cdot)}$ и $C_6^{(\cdot)}$ - несимметричной. В дальнейшем эти два частных решения мы будем называть "моментными". Проблема состоит именно в нахождении "моментных" частных решений.

Подробно изложим методику их получения на примере решения системы (6.5) для n -ной гармоника, где $n > 1$.

Общее решение системы уравнений (6.5) имеет вид:

$$\begin{aligned} U(\rho) &= \sum_{i=1}^6 C_i U_i(\rho), \\ V(\rho) &= \sum_{i=1}^6 C_i V_i(\rho), \\ \omega(\rho) &= \sum_{i=1}^6 C_i \omega_i(\rho). \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $U_i(\rho)$, $V_i(\rho)$, $\omega_i(\rho)$, ($i = 1, \dots, 6$) - частные решения системы (6.5), а C_i - произвольные постоянные, определяемые из краевых условий. Верхний индекс n здесь и далее опущен для сокращения записи. Вид частных решений, стоящих при коэффициентах C_1, \dots, C_4 , соответствует симметричной теории упругости:

$$\begin{aligned} U^*(\rho) &= \frac{C_1^*}{\rho^{(n+1)}} + \frac{C_2^*}{\rho^{(n-1)}} + C_3^* \rho^{(n-1)} + C_4^* \rho^{(n+1)}, \\ V^*(\rho) &= \frac{C_1^*}{\rho^{(n+1)}} + C_2^* \frac{n\lambda - 2\lambda + n\mu - 4\mu}{n\lambda + n\mu + 2\mu} \frac{1}{\rho^{(n-1)}} - C_3^* \rho^{(n-1)} - \\ &\quad - C_4^* \frac{n\lambda + 2\lambda + n\mu + 4\mu}{n\lambda + n\mu - 2\mu} \rho^{(n+1)}, \\ \omega^*(\rho) &= C_2^* \frac{2n\lambda - 2\lambda + 4n\mu - 4\mu}{n\lambda + n\mu + 2\mu} \frac{1}{\rho^n} - C_4^* \frac{2n\lambda + 2\lambda + 4n\mu + 4\mu}{n\lambda + n\mu - 2\mu} \rho^n. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Частные "моментные" решения можно отыскать в несколько этапов. На первом этапе повысим порядок, исключив из системы неизвестную функцию $V(\rho)$ и получив тем самым систему уравнений четвёртого порядка. Далее еще раз повысим порядок, исключив функцию $\omega(\rho)$, и получим обыкновенное дифференциальное уравнение шестого порядка относительно $U(\rho)$. Потом используем процедуру понижения порядка [26] с использованием классических частных решений (6.9), что позволит отыскать оставшиеся "моментные" решения.

Исключим переменную $V(\rho)$. Для этого продифференцируем уравнение (6.5.1), заменив в нём вторую производную по V значением,

взятым из (6.5.2). Получим уравнение третьего порядка относительно $U(\rho)$, после чего перепишем его и (6.5.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{\rho^3}V(\rho) + \frac{A_1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}V(\rho) &= -\frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) - \frac{1}{\rho}\frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + \frac{A_2}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}U(\rho) + \\ &+ \frac{A_3}{\rho^3}U(\rho) + \frac{A_4}{\rho}\frac{d}{d\rho}\omega(\rho) + \frac{A_5}{\rho^2}\omega(\rho), \\ & -\frac{n(3\mu + \alpha + \lambda)}{(\lambda + 2\mu)\rho^2}V(\rho) - \frac{n(\lambda - \alpha + \mu)}{(\lambda + 2\mu)\rho}\frac{d}{d\rho}V(\rho) = -\frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) - \\ & -\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}U(\rho) + \frac{2\mu + \lambda + \alpha n^2 + \mu n^2}{(\lambda + 2\mu)\rho^2}U(\rho) - \frac{2n\alpha}{(\lambda + 2\mu)\rho}\omega(\rho). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Представляя (6.10) как систему линейных алгебраических уравнений, разрешим её относительно символов $V(\rho)$ и $\frac{d}{d\rho}V(\rho)$:

$$\begin{aligned} V(\rho) &= B_{11}\rho^3\frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) + B_{12}\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + B_{13}\rho\frac{d}{d\rho}U(\rho) + \\ &+ B_{14}U(\rho) + B_{15}\rho^2\frac{d}{d\rho}\omega(\rho) + B_{16}\rho\omega(\rho), \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho}V(\rho) &= B_{21}\rho^2\frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) + B_{22}\rho\frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + B_{23}\frac{d}{d\rho}U(\rho) + \\ &+ \frac{B_{24}}{\rho}U(\rho) + B_{25}\rho\frac{d}{d\rho}\omega(\rho) + B_{26}\omega(\rho). \end{aligned}$$

Для примера приведём вид констант в соотношении для $V(\rho)$:

$$\begin{aligned} B_{11} &= -\frac{(\mu + \alpha)(\mu - \alpha + \lambda)}{n(n\lambda + 2\alpha - n\alpha + 2\mu + n\mu)(n\lambda - 2\alpha - n\alpha - 2\mu + n\mu)}, \\ B_{12} &= \frac{2(\mu + \alpha)(\alpha - 3\mu - 2\lambda)}{n(n\lambda + 2\alpha - n\alpha + 2\mu + n\mu)(n\lambda - 2\alpha - n\alpha - 2\mu + n\mu)}, \\ B_{13} &= -\frac{n^2(\lambda^2 - 3\lambda\alpha + \lambda\mu - 2\alpha\mu + 2\alpha^2) + \lambda\mu + \lambda\alpha + \alpha^2 + 3\mu^2 + 4\alpha\mu}{n(n\lambda + 2\alpha - n\alpha + 2\mu + n\mu)(n\lambda - 2\alpha - n\alpha - 2\mu + n\mu)}, \\ B_{14} &= \frac{(3\mu + \alpha + \lambda)(\mu + \alpha + 2n^2\alpha - n^2\lambda)}{n(n\lambda + 2\alpha - n\alpha + 2\mu + n\mu)(n\lambda - 2\alpha - n\alpha - 2\mu + n\mu)}, \\ B_{15} &= \frac{2\alpha(\alpha - \mu - \lambda)}{(n\lambda + 2\alpha - n\alpha + 2\mu + n\mu)(n\lambda - 2\alpha - n\alpha - 2\mu + n\mu)}, \\ B_{16} &= -\frac{4\alpha(\mu + \alpha)}{(n\lambda + 2\alpha - n\alpha + 2\mu + n\mu)(n\lambda - 2\alpha - n\alpha - 2\mu + n\mu)}. \end{aligned}$$

Дважды дифференцируем (6.5.1), каждый раз заменяя выражения для $\frac{d^2}{d\rho^2}V(\rho)$, $\frac{d}{d\rho}V(\rho)$, $V(\rho)$, $\frac{d^2}{d\rho^2}\omega(\rho)$ на значения, взятые из (6.5.2)-(6.5.3), и (6.11), в результате получим уравнение четвёртого порядка относительно $U(\rho)$. Добавляем к нему уравнение (6.5.3), в которое также подставлены выражения (6.11), получим систему однородных

линейных дифференциальных уравнений четвёртого порядка с двумя неизвестными функциями:

$$\begin{aligned} \frac{d^4}{d\rho^4}U(\rho) = & -\frac{6}{\rho}\frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) - \frac{5-2n^2}{\rho^2}\frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + \frac{1+2n^2}{\rho^3}\frac{d}{d\rho}U(\rho) - \\ & -\frac{1-2n^2+n^4}{\rho^4}U(\rho) - \frac{2n\alpha}{(\alpha+\mu)\rho}\frac{d^2}{d\rho^2}\omega(\rho) - \\ & -\frac{2n\alpha}{(\alpha+\mu)\rho^2}\frac{d}{d\rho}\omega(\rho) + \frac{2n^3\alpha}{(\alpha+\mu)\rho^3}\omega(\rho), \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2}\omega(\rho) = & -\left(D_1\rho + \frac{1}{\rho}\right)\frac{d}{d\rho}\omega(\rho) - \left(D_2 + \frac{n^2}{\rho^2}\right)\omega(\rho) - D_3\rho^2\frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) - \\ & -D_4\rho\frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) - D_5\frac{d}{d\rho}U(\rho) - \frac{D_6}{\rho}U(\rho). \end{aligned}$$

Коэффициенты данных уравнений определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} D_1 = & -\frac{8\alpha^2(2\mu + \lambda)}{(\gamma + \varepsilon)(n\lambda + 2\alpha - n\alpha + 2\mu + n\mu)(n\lambda - 2\alpha - n\alpha - 2\mu + n\mu)}, \\ D_2 = & -\frac{4\alpha(n^2\mu^2 - 4\mu^2 - 4\alpha\mu + 2n^2\lambda\mu - n^2\alpha\lambda + n^2\lambda^2 - n^2\alpha\mu)}{(\gamma + \varepsilon)(n\lambda + 2\alpha - n\alpha + 2\mu + n\mu)(n\lambda - 2\alpha - n\alpha - 2\mu + n\mu)}, \\ D_3 = & -\frac{4\alpha(\alpha + \mu)(\lambda + 2\mu)}{n(\gamma + \varepsilon)(n\lambda + 2\alpha - n\alpha + 2\mu + n\mu)(n\lambda - 2\alpha - n\alpha - 2\mu + n\mu)}, \\ D_4 = & -\frac{2\alpha(\lambda + 2\mu)(n^2\lambda + 8\mu + n^2\mu - n^2\alpha + 8\alpha)}{n(\gamma + \varepsilon)(n\lambda + 2\alpha - n\alpha + 2\mu + n\mu)(n\lambda - 2\alpha - n\alpha - 2\mu + n\mu)}, \\ D_5 = & -\frac{2\alpha(\lambda + 2\mu)(3n^2\lambda + 2\mu - 5n^2\alpha + n^2\mu + 2\alpha)}{n(\gamma + \varepsilon)(\lambda + 2\alpha - n\alpha + 2\mu + n\mu)(n\lambda - 2\alpha - n\alpha - 2\mu + n\mu)}, \\ D_6 = & \frac{2\alpha(n-1)(n+1)(\lambda + 2\mu)(n^2\lambda - n^2\alpha + n^2\mu - 2\alpha - 2\mu)}{n(\gamma + \varepsilon)(n\lambda + 2\alpha - n\alpha + 2\mu + n\mu)(n\lambda - 2\alpha - n\alpha - 2\mu + n\mu)}. \end{aligned}$$

Еще раз выполним процедуру повышения порядка, исключив из (6.12) функцию $\omega(\rho)$ и сведя его к уравнению шестого порядка. Процедура аналогична описанной ранее, поэтому приведём только результат:

$$\begin{aligned} \omega(\rho) = & F_9\rho^2\frac{d^5}{d\rho^5}U(\rho) + F_8\rho\frac{d^4}{d\rho^4}U(\rho) + (F_7 + F_6\rho^2)\frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) + \\ & + \left(\frac{F_5}{\rho} + F_4\rho\right)\frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + \left(\frac{F_3}{\rho^2} + F_2\right)\frac{d}{d\rho}U(\rho) + \left(\frac{F_1}{\rho^3} + \frac{F_0}{\rho}\right)U(\rho). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Уравнение шестого порядка:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^6}{d\rho^6}U(\rho) + \frac{9}{\rho} \frac{d^5}{d\rho^5}U(\rho) - \left(G + 3\frac{n^2-4}{\rho^2}\right) \frac{d^4}{d\rho^4}U(\rho) - \\
& \quad - \left(\frac{6G}{\rho} + 6\frac{n^2+1}{\rho^3}\right) \frac{d^3}{d\rho^3}U(\rho) + \\
& \quad + \left(\frac{G(2n^2-5)}{\rho^2} + 3\frac{n^4-n^2+3}{\rho^4}\right) \frac{d^2}{d\rho^2}U(\rho) + \\
& \quad + \left(\frac{G(2n^2+1)}{\rho^3} + 3\frac{-n^4+n^2-3}{\rho^5}\right) \frac{d}{d\rho}U(\rho) + \\
& + \left(-\frac{G(n-1)^2(n+1)^2}{\rho^4} + \frac{(3-n)(3+n)(n-1)^2(n+1)^2}{\rho^6}\right) U(\rho) = 0, \\
& \quad G = \frac{4\alpha\mu}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Вопрос о существовании решения данного уравнения разрешается теоремой [26]: если коэффициенты уравнения (6.14) непрерывны в интервале (a, b) , то существует фундаментальная система решений, определённых в этом интервале.

Коэффициенты при производных в левой части уравнения, содержащие независимую переменную, имеют вид двучленов по степеням этой переменной, причём для каждого коэффициента сумма абсолютных значений младшей степени и порядка производной не превышает порядок уравнения. Это означает, что частное решение представимо в виде обобщённого ряда по независимой переменной:

$$U_q(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} S_i \cdot \rho^{i+q}. \tag{6.15}$$

Характеристическое уравнение относительного параметра q имеет вид:

$$\begin{aligned}
& (q-n-1) \cdot (q+n+1) \cdot (q-n+1) \cdot (q+n-1) \cdot \\
& \quad \cdot (q+n-3) \cdot (q-n-3) = 0.
\end{aligned}$$

Известно [26], что для максимального значения параметра q можно построить частное решение в виде обобщённого ряда (6.15). Для остальных значений параметра это также возможно, если эти значения не кратны максимальному и не кратны между собой. Кроме

этого, такое представление частных решений не всегда возможно, если разница между значениями параметров целочисленна. В нашем случае целочисленная разница значений даёт нам кратность корней характеристического уравнения для некоторых n .

Поэтому для отыскания "моментных" частных решений воспользуемся методом понижения порядка уравнения (6.14), последовательно применяя подстановки, основанные на классических решениях (6.9) [26]:

$$\begin{aligned} U(\rho) &= U_1(\rho) \cdot \int H(\rho) d\rho, & H_i(\rho) &= \frac{d}{d\rho} \left(\frac{U_{i+1}(\rho)}{U_1(\rho)} \right), & i &= \overline{1, 3}, \\ H(\rho) &= H_1(\rho) \cdot \int J(\rho) d\rho, & J_i(\rho) &= \frac{d}{d\rho} \left(\frac{H_{i+1}(\rho)}{H_1(\rho)} \right), & i &= \overline{1, 2}, \\ J(\rho) &= J_1(\rho) \cdot \int L(\rho) d\rho, & L_1(\rho) &= \frac{d}{d\rho} \left(\frac{J_2(\rho)}{J_1(\rho)} \right), \\ L(\rho) &= L_1(\rho) \cdot \int M(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (6.16)$$

В результате получим уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2}{d\rho^2} M(\rho) + \frac{5 + 2n}{\rho} \frac{d}{d\rho} M(\rho) + \frac{9 + 6n - G\rho^2}{\rho^2} M(\rho) = 0. \quad (6.17)$$

Данное уравнение имеет два частных решения [13]:

$$\begin{aligned} M_1(\rho) &= \rho^{(n+3)} I_n(\sqrt{G}\rho), \\ M_2(\rho) &= \rho^{(n+3)} K_n(\sqrt{G}\rho). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Осуществив преобразования (6.16) в обратном порядке, получим искомые "моментные" частные решения:

$$\begin{aligned} U_5(\rho) &= \rho^{-1} I_n(\sqrt{G}\rho), \\ U_6(\rho) &= \rho^{-1} K_n(\sqrt{G}\rho). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Далее, используя (6.13), определим "моментные" решения для вектора поворота. Зная их и используя (6.11.1), несложно отыскать частные решения для азимутальной компоненты вектора перемещения.

Окончательно запишем решение в безразмерной форме. Для этого в качестве характерного геометрического размера выберем некоторый радиус R_1 и воспользуемся ранее введёнными (1.18) безразмерными величинами A, B .

Все это позволяет выписать безразмерный вид общего решения в явной форме:

$$\begin{aligned}
U^{(n)}(\rho) &= \frac{C_1^{(n)}}{\rho^{(n+1)}} + \frac{C_2^{(n)}}{\rho^{(n-1)}} + C_3^{(n)}\rho^{(n-1)} + C_4^{(n)}\rho^{(n+1)} + \\
&\quad + \frac{C_5^{(n)}}{\rho}I_n(2A\rho) + \frac{C_6^{(n)}}{\rho}K_n(2A\rho), \\
V^{(n)}(\rho) &= \frac{C_1^{(n)}}{\rho^{(n+1)}} + C_2^{(n)}\frac{n\lambda - 2\lambda + n\mu - 4\mu}{n\lambda + n\mu + 2\mu}\frac{1}{\rho^{(n-1)}} - \\
&\quad - C_3^{(n)}\rho^{(n-1)} - C_4^{(n)}\frac{n\lambda + 2\lambda + n\mu + 4\mu}{n\lambda + n\mu - 2\mu}\rho^{(n+1)} + \\
&\quad + C_5^{(n)}\left\{\frac{I_n(2A\rho)}{\rho} - \frac{2A}{n}I_{n-1}(2A\rho)\right\} + \\
&\quad + C_6^{(n)}\left\{\frac{K_n(2A\rho)}{\rho} + \frac{2A}{n}K_{n-1}(2A\rho)\right\}, \\
\omega^{(n)}(\rho) &= C_2^{(n)}\frac{2n\lambda - 2\lambda + 4n\mu - 4\mu}{n\lambda + n\mu + 2\mu}\frac{1}{\rho^n} - \\
&\quad - C_4^{(n)}\frac{2n\lambda + 2\lambda + 4n\mu + 4\mu}{n\lambda + n\mu - 2\mu}\rho^n - \\
&\quad - C_5^{(n)}\frac{2A^2B}{n}I_n(2A\rho) - C_6^{(n)}\frac{2A^2B}{n}K_n(2A\rho).
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Константы при частных решениях в соотношениях (6.6), (6.7) и (6.20) определяются из краевых условий соответствующих задач.

Соотношения (6.6), (6.7) и (6.20) будут являться также и решениями уравнения (1.23), описывающего краевую задачу для среды псевдокоссера, если $B = 1$ (1.18), что соответствует предельной ситуации при $\alpha \rightarrow \infty$. Подробное доказательство этого утверждения выходит за рамки данной работы. Следует отметить, что это можно доказать, также используя вышеописанную методику.

Глава 7.

Анализ решений

Решения, полученные в гл. 2-5 данной работы, позволяют провести сравнения напряжённно-деформированного состояния на различных границах рассмотренных областей в рамках среды Коссера, среды псевдокоссера и симметричной среды. Акцент в этом сравнении сделаем на возможность использования полученных решений с точки зрения возможности реализации эксперимента и его интерпретации.

Сравнивая безразмерные формы записи решений (2.9) и (2.3), (3.20) и (3.4), (4.16) и (4.4), (5.20) и (5.4), отметим, что решения, полученные в рамках несимметричной теории, являются функциями характерного геометрического размера исследуемой области, в то время как классические от него не зависят. Из этого можно предположить, что при фиксированных материальных константах среды Коссера и параметрах нагружения есть возможность нахождения такого характерного геометрического размера, при котором различия "моментного" и классического решений будут значительными.

На рис. 7.1-7.6 приведены зависимости различных характеристик напряжённно-деформированного состояния для всех рассмотренных задач. Для построения зависимостей использовались значения материальных констант для синтетического полиуретана (см. табл. 1

гл. 2), пересчитанные по соотношениям (1.19): $\lambda = 2.096 \cdot 10^9 \bar{z}$, $\mu = 1.033 \cdot 10^9 \bar{z}$, $\alpha = 1.148 \cdot 10^8 \bar{z}$, $\gamma = 4.1 \cdot 10^6$, $\varepsilon = 1.312 \cdot 10^5$. Сплошной линией обозначены графики, соответствующие среде Коссера, точечной - среде псевдокоссера, пунктирной - симметричной среде.

Зависимости, представленные на этих графиках, позволяют сделать вывод о том, что в качестве экспериментально измеряемых макровеличин можно выбрать:

- 1) Для первой задачи максимальное осевое смещение $u_y(l/2)$ (2.9). Значение этой величины в рамках теории среды Коссера отличается от классических значений, что видно из рис. 7.1.а.
- 2) Для второй задачи крутящий момент на внутреннем контуре M (3.20). Величину этого макромомента в меньшей степени определяет компонента $\sigma_{\rho\varphi}(R_0)$ тензора напряжений, которая для рассмотренного материала имеет незначительное отклонение от классического значения (0.3%, рис. 7.2.в) и в большей степени компонента $\mu_{\rho z}(R_0)$ тензора моментных напряжений (рис. 7.2.д).
- 3) Для третьей задачи осевая сила реакции внутреннего контура F (4.16). Значение этой силы в основном определяется величиной компоненты $\sigma_{\rho\varphi}(R_0, \varphi)$ тензора напряжений, которая имеет значительные различия в классическом случае и в случае среды Коссера (рис. 7.4.а) и в меньшей степени компонентой $\sigma_{\rho\rho}(R_0, \varphi)$, которая имеет незначительные отличия от классического случая (рис. 7.4.б).
- 4) Для четвертой задачи параметр D (5.20), характеризующий степень искажения контура кругового отверстия. Этот параметр имеет значительные отличия в случаях классической и несимметричной среды, что продемонстрировано на рис. 7.6.а.

Для оценки информативности каждой задачи с точки зрения проявления несимметричного эффекта поведения материала сконструируем относительные параметры, характеризующие степень отличия "моментных" решений от классических по введённым макровеличинам. Эти параметры имеют вид:

- для задачи о сдвиге

$$\delta_1 = \left| \frac{u_y(l/2) - u_y^*(l/2)}{u_y^*(l/2)} \right| \cdot 100\%; \quad (7.1)$$

- для задачи о кручении

$$\delta_2 = \left| \frac{M - M^*}{M^*} \right| \cdot 100\%; \quad (7.2)$$

- для задачи о деформировании плоского кольца

$$\delta_3 = \left| \frac{F_y - F_y^*}{F_y^*} \right| \cdot 100\%; \quad (7.3)$$

- для задачи Кирша

$$\delta_4 = \left| \frac{D - D^*}{D^*} \right| \cdot 100\%. \quad (7.4)$$

Графические зависимости введённых относительных параметров от соответствующих характерных геометрических размеров приведены на рис. 7.1.з, рис. 7.2.з, рис. 7.3.з, рис. 7.5.з. Из сравнения этих графиков видно, что:

- 1) Все относительные параметры возрастают по мере уменьшения характерного геометрического размера. В задаче о кручении кольца наблюдается неограниченное возрастание этой степени различий. В остальных задачах степень различия, при фиксированных материальных константах, видимо имеет конечный предел при неограниченном уменьшении толщины слоя за счёт уменьшения характерного геометрического размера.

2) наибольшая степень возрастания имеет место для величины δ_2 , соответствующей задаче о кручении. Однако с точки зрения простоты экспериментальной схемы и надёжности измерений более привлекательной является величина δ_4 задачи Кирша. В задачах о сдвиге плоского слоя и деформировании плоского кольца несимметричные эффекты поведения материала проявляются, по-видимому, незначительно.

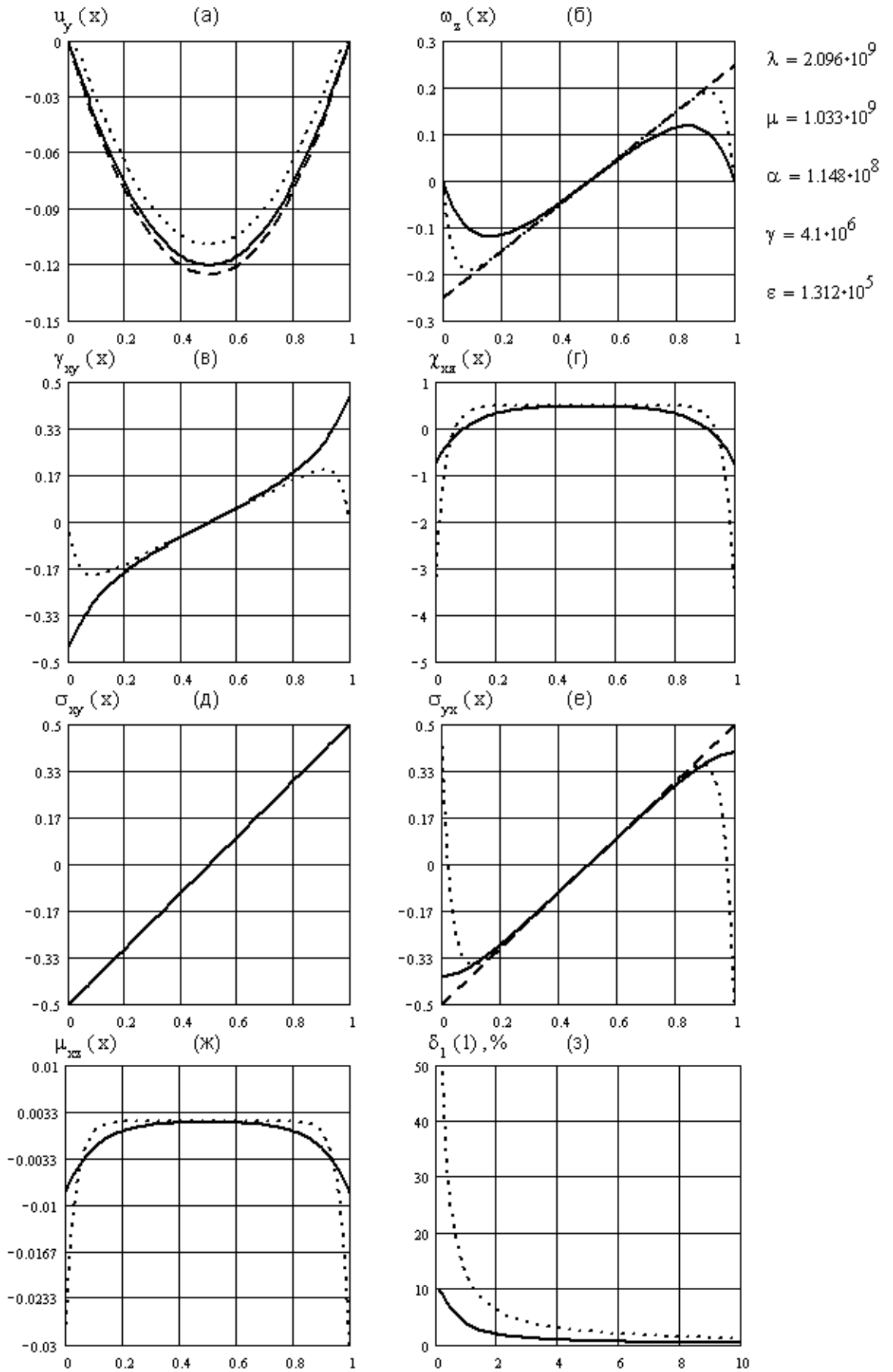


Рис. 7.1. Напряжённно-деформированное состояние задачи о сдвиге для синтетического полиуретана

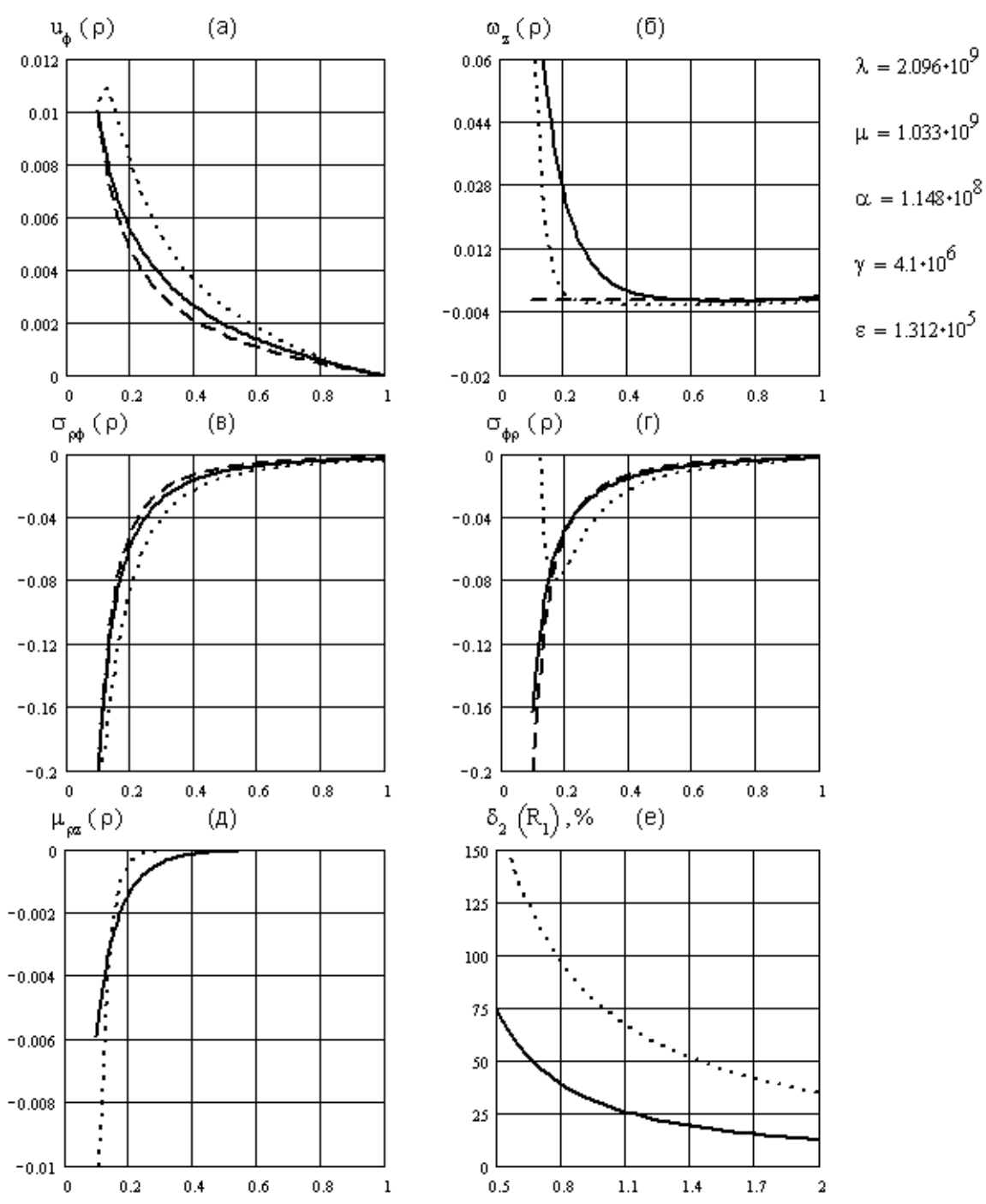


Рис. 7.2. Напряжённно-деформированное состояние задачи о кручении шайбы для синтетического полуретана

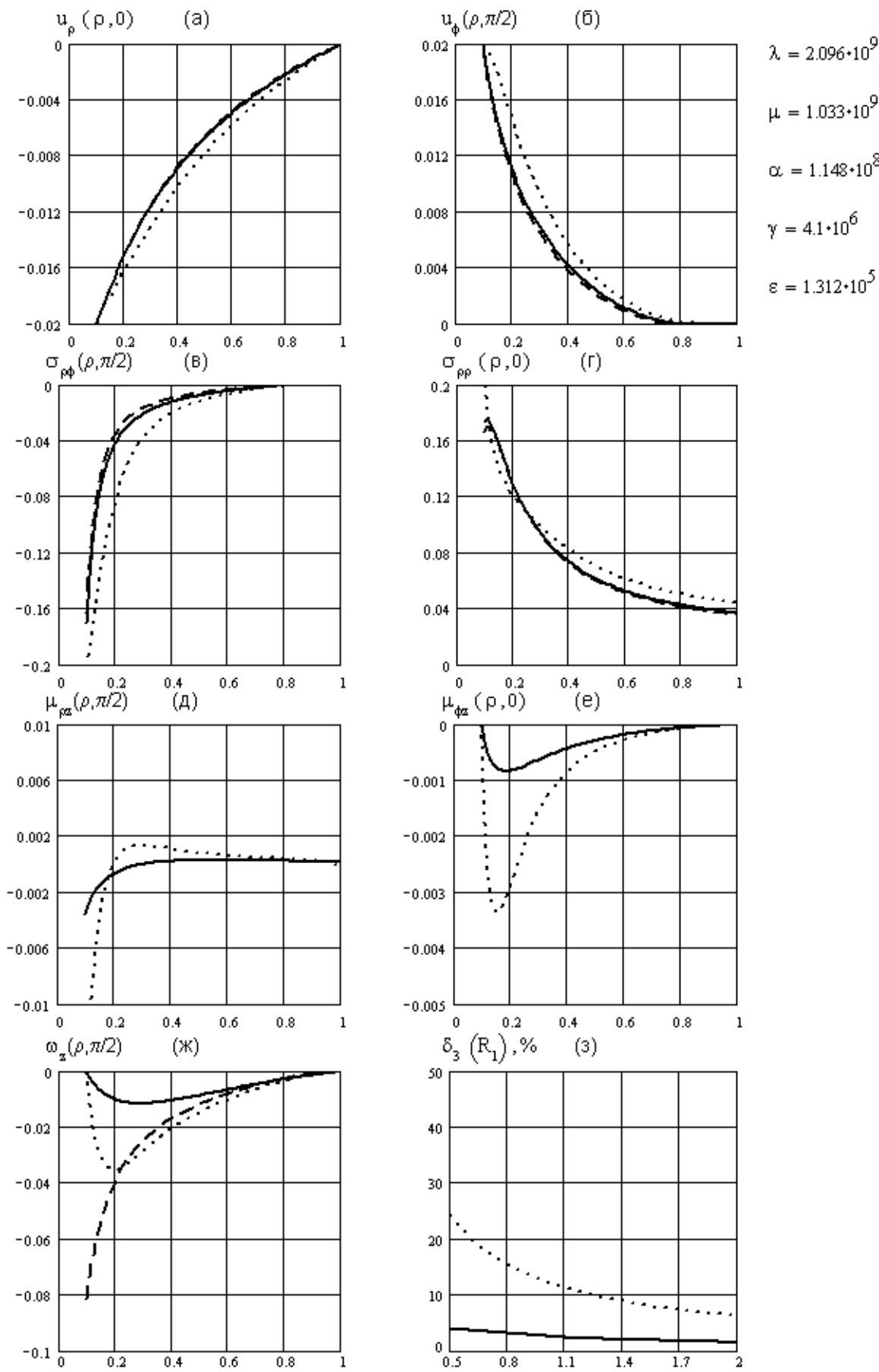


Рис. 7.3. Зависимости характеристик НДС от радиуса в задаче о деформировании шайбы для синтетического полиуретана

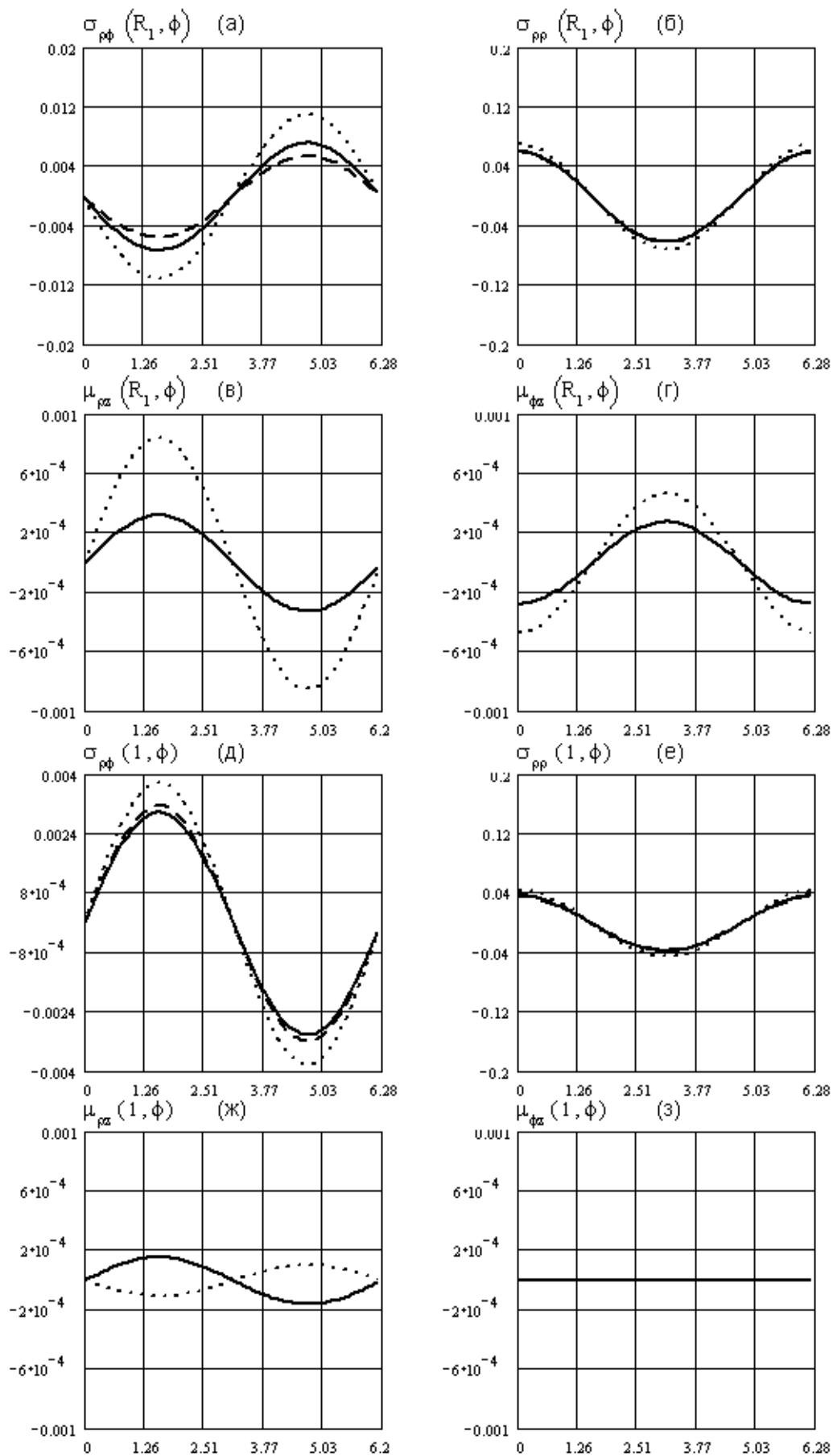


Рис. 7.4. Зависимости характеристик НДС от угла в задаче о деформировании шайбы для синтетического полиуретана

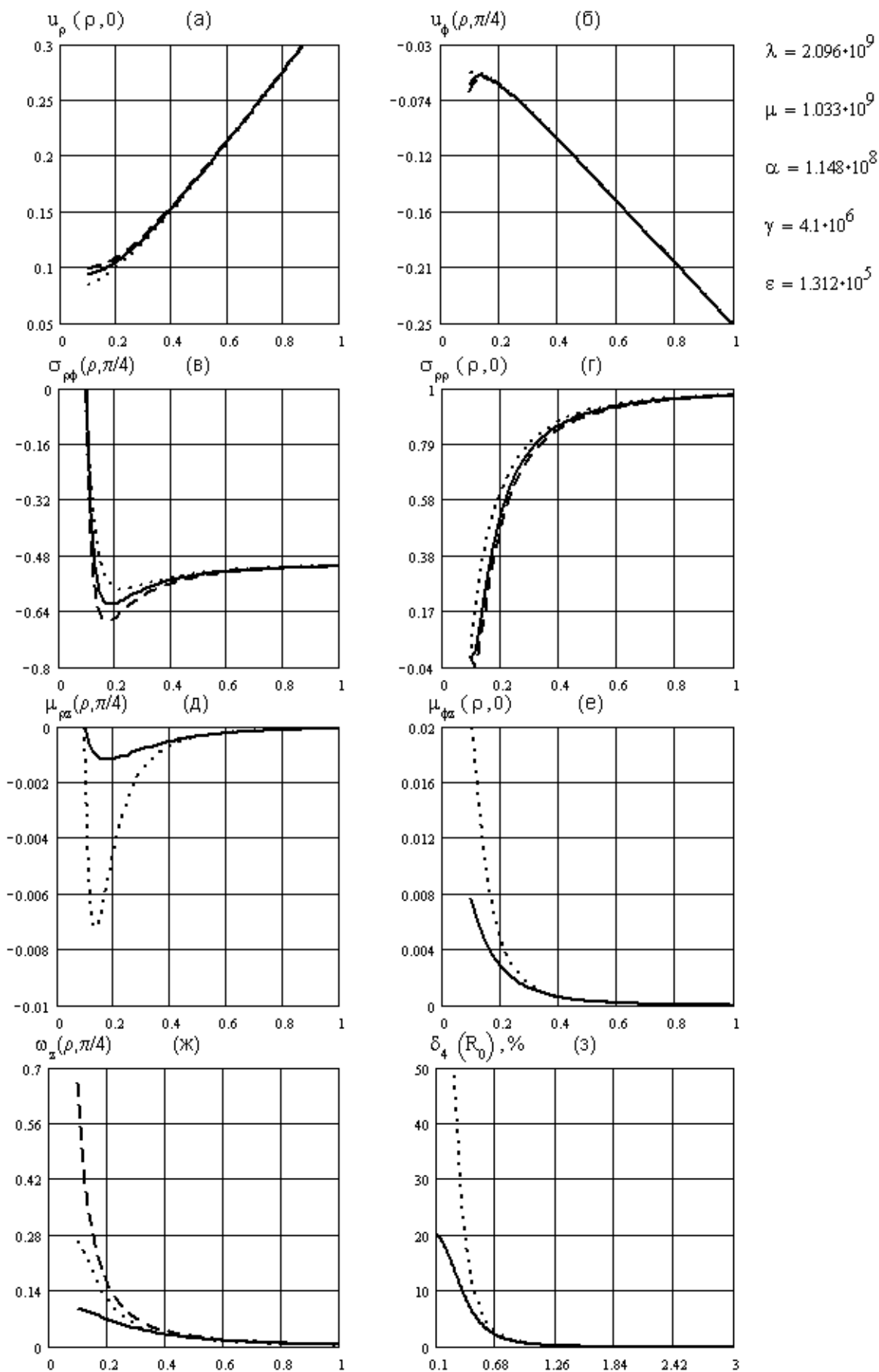


Рис. 7.5. Зависимости характеристик НДС от радиуса в задаче Кирша для синтетического полиуретана

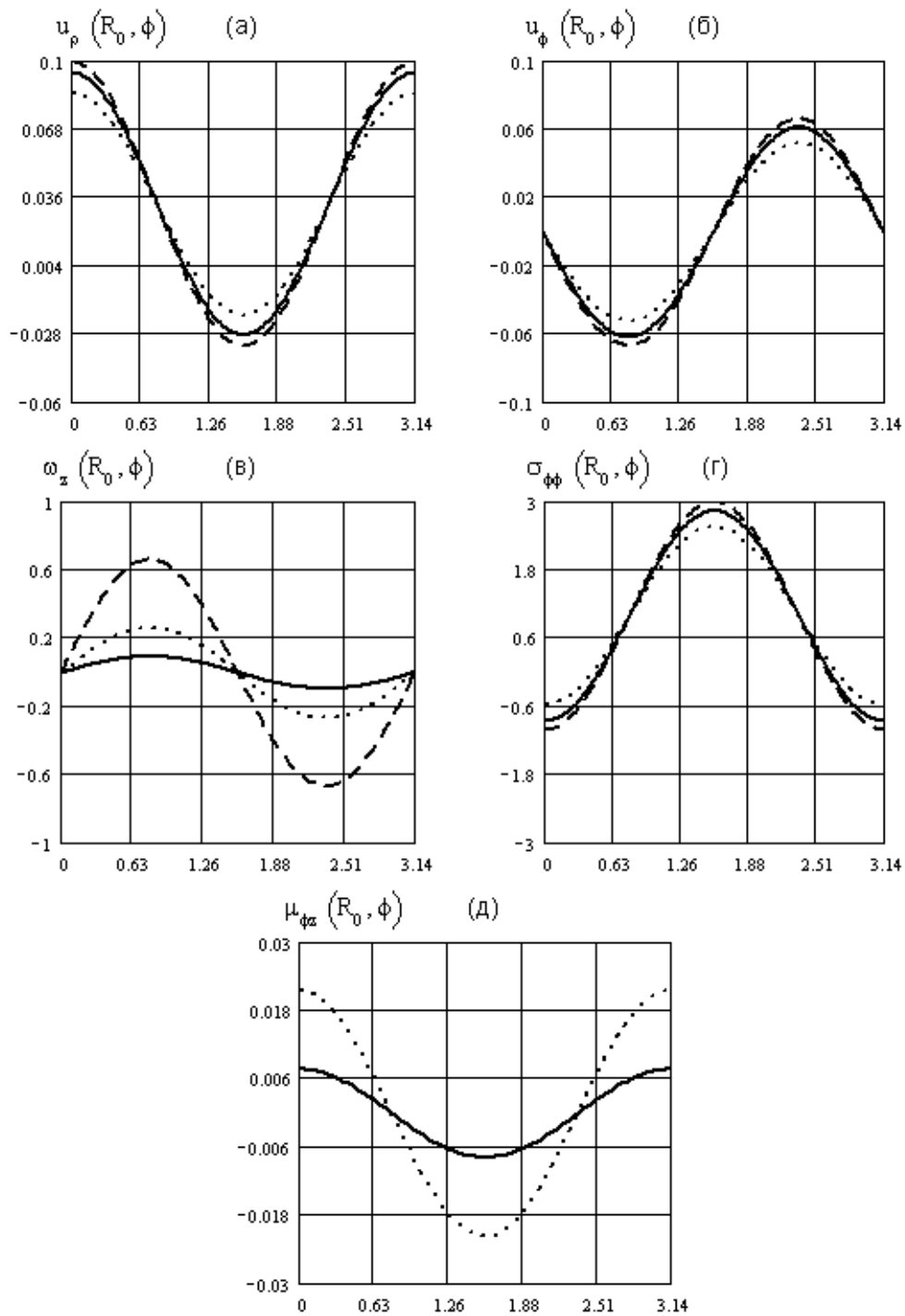


Рис. 7.6. Зависимости характеристик НДС от угла в задаче Кирша для синтетического полиуретана

Глава 8.

Выводы по работе

В данной работе получены следующие новые результаты:

- 1) Предложен подход к построению точных аналитических решений некоторых одномерных и двумерных статических краевых задач в рамках несимметричной теории упругости для среды Коссера.
- 2) С использованием данного подхода получены точные аналитические решения ряда задач, записанные в безразмерной форме через функции Бесселя.
- 3) На основе анализа поведения полученных решений введены экспериментально измеряемые макропараметры, откликающиеся на "моментное" поведение среды.

Качественный и численный анализ аналитических решений и введённых макропараметров позволяет сделать ряд выводов:

- 1) Безразмерная форма записи полученных аналитических решений позволяет наглядно установить принципиальное различие безразмерных "моментных" и классических решений. А именно, безразмерное "моментное" решение зависит от характерного геометрического размера, а классическое - нет.

- 2) Все введённые относительные макропараметры (7.1)-(7.4) возрастают по мере уменьшения характерного геометрического размера. В задаче о кручении кольца наблюдается неограниченное возрастание этой степени различий. В остальных задачах степень различия, при фиксированных материальных константах, видимо имеет конечный предел при неограниченном уменьшении толщины слоя за счёт уменьшения характерного геометрического размера.
- 3) Наибольшая степень возрастания имеет место для величины δ_2 , соответствующей задаче о кручении. Однако, с точки зрения простоты экспериментальной схемы и надёжности измерений, более привлекательной является величина δ_4 задачи Кирша. В задачах о сдвиге плоского слоя и деформировании плоского кольца несимметричные эффекты поведения материала проявляются, по-видимому, незначительно.
- 4) Полученные решения и введённые макропараметры (7.1)-(7.4) в значительной степени позволяют определить схему эксперимента и необходимую точность измерений, а также методы обработки экспериментальных данных с целью обнаружения эффектов поведения материала, предсказываемых несимметричной теорией упругости для среды Коссера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-00240 и 01-01-06001).

Литература

1. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости с вращательным взаимодействием частиц. // ФТТ. 1960. т.2, вып. 7. С. 1399-1409.
2. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Континуальная теория асимметричной упругости. Учет внутреннего вращения. // ФТТ. 1964. т.6. вып. 9. С. 2689-2699.
3. Белоносов С.М. Моментная теория упругости. Владивосток: Дальнаука, 1983.
4. Башелейшвили М.О., Натрошвили Д.Г. О единственности решения задачи Коши в моментной теории упругости. // В сб. "Некоторые задачи теории упругости". Тбилиси: Тбилис. ун-т, 1975, с. 21-27.
5. Ванин Г.А. Градиентная теория упругости. // Изв. РАН. МТТ, 1999, № 1. С. 46-53
6. Введение в нелинейную механику. Ч.1. Необходимые сведения из тензорного исчисления. Сост. проф. П.В.Трусов, проф. Ю.И.Няшин. - Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1992. 104 с.
7. Гиоргашвили Л.Г. Эффективные решения граничных задач статики моментной теории упругости для круга и бесконечной области с круговым отверстием. // В сб. "Исслед. некотор. уравнений мат. физ". Тбилиси: Тбилис. ун-т, 1974, с. 29-42.

8. Динамика и устойчивость слоистых композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1992.
9. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. - 328 с.
10. Ерофеев В.И. Редюшкин В.М. Наблюдение дисперсии упругих волн в зернистом композите и математическая модель для ее описания. // Акуст. журнал, 1992, Т. 38, № 6. С. 1116-1117.
11. Ильюшин А.А. Ломакин В.А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел. // Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971. С. 54-61.
12. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973, 303 с.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1971. - 576 с.
14. Кордзадзе М.А. Интегрирование неоднородной системы уравнений плоской моментной теории упругости. // "Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе, Сообщ. АН ГрузССР". 1978. Т.89, вып. 1. с. 45-48.
15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и ин-женеров). - М.: Наука, 1973. - 831 с.
16. Короткина М.Р. Моментные теории упругости и их связь с полевыми теориями, построенными на дискретных структурах. // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. № 4. С. 225-240.
17. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975.

18. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитического решения некоторой двумерной задачи несимметричной теории упругости // Вестник ПГТУ. Вычислительная математика и механика. - Пермь: ПГТУ, 2000. № 1. С. 55-60.
19. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости // Известия РАН, Механика твердого тела. - М: Наука, 2001. (в печати).
20. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости и их параметрический анализ. // Тезисы докладов областной конференции молодых ученых "Молодежная наука Прикамья", Пермь, 2000. - Пермь: ПГТУ, 2000. С. 322.
21. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера. // ПМТФ. - Новосибирск, 2001. Т. 42. № 4. С. 145-154.
22. Кулеш М.А., Шардаков И.Н. Построение и анализ некоторых точных аналитических решений двумерных упругих задач в рамках континуума Коссера. // Вестник ПГТУ. Математическое моделирование. - Пермь: ПГТУ, 2001. № 9. С. 187-201.
23. Кулеш М.А., Шардаков И.Н. Построение и анализ аналитических решений некоторых одномерных и двумерных задач моментной теории упругости. // Тезисы докладов VIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, Пермь, 2001. - Екатеринбург: УрО РАН, 2001. С. 380.
24. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

25. Маисаиа О.И. Теоремы существования в моментной теории упругости. // "Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиის მოამბე, Сообщ. АН ГрузССР". 1974. Т.75, вып. 2. с. 293-296.
26. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Высшая школа, 1967. - 408 с.
27. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
28. Морозов Н.Ф. Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 182 с.
29. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 707 с.
30. Натрошвили Д.Г., Джагмаидзе А.Я. Общее представление решения уравнений статики моментной теории упругости и некоторые его приложения. // В сб. "Некотор. задачи теории упругости". Тбилиси: Тбилис. ун-т, 1975, с. 93-112.
31. Немиш Ю.Н. Плоская задача моментной теории упругости для области с круговым отверстием. // Прикл. мех. 1965. т. 1, вып. 5.
32. Немиш Ю.Н. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в несимметричной теории упругости. // Прикл. мех. 1966. т. 2, вып. 4.
33. Немиш Ю.Н. Подкрепленное круговое отверстие в упругом поле несимметричным тензором напряжений. // Прикл. мех. 1966. т. 2, вып. 7.

34. Немиш Ю.Н., Третьяк В.П. К решению плоской задачи моментной теории упругости для многосвязных областей. // В сб. "Концентрация напряж. Вып. 3". Киев: Наук. думка, 1971, с. 94-100.
35. Новаций В. Теория упругости. Пер. с польск. Победря Б.Е. М.: Мир, 1975. 872 с.
36. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости. // Прикладная математика и механика. 1964. т. 28, вып. 3. С. 401-408
37. Пальмов В.А. Плоская задача теории несимметричной упругости. // Прикладная математика и механика. 1964. т. 28, вып. 6. С. 1117-1120
38. Рущицкий Я.Я. Элементы теории смесей. Киев: Наук. думка, 1991.
39. Рущицкий Я.Я. Взаимодействие волн сжатия и сдвига в композитном материале с нелинейно-упругими компонентами в микроструктуре. // Прикл. механика. 1993. т. 29, № 4. С. 23-30
40. Сабодаш П.Ф. Филиппов И.Г. О воздействии подвижной нагрузки на упругое полупространство с учетом моментных напряжений. // Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971. С.317-321.
41. Савин Г.Н. Механика деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1979. 465 с.
42. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968.
43. Савин Г.Н. Лукашов А.А. Лыско Е.М. Распространение упругих волн в твердом теле с микроструктурой. // Прикл. механика. 1970. т. 6. № 7. С. 48-52.

44. Седов Л.И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. // ПММ, 1968. Т. 32. № 5. С.771-785
45. Савин Г.Н. Лукашов А.А. Лыско Е.М. Временко С.В. Агасьев Г.Г. Распространение упругих волн в континууме Коссера со стесненным вращением. // Прикл. механика. 1970. т. 6. № 6. С. 37-41.
46. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости. // В сб. Разрушение. Т.2. Математические основы теории разрушения. - М.: Мир, 1975. С.646-751.
47. Anthonie A. Effect of couple-stress on the elastic bending of beams. Int. J. of Solid and Structures. 2000. V. 37. P.1003-1018.
48. Bogy D.B. Sternberg E. The effect of couple-stress on the corner singularity due to an asymmetric shear loading. // Int. J. of Solid and Structures. 1968. V. 4. P.159-174.
49. Chiu B.M., Lee James D. On the plane problem in micropolar elasticity. // Int. J. Eng. Sci. 1973. V. 11. No. 9. P. 997-1012
50. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables, Paris, 1909.
51. Dhaliwal Ranjit S., Chowdhury Kashmiri L. The axisymmetric Reissner-Sagoci problem in the linear micropolar elasticity. // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci techn. 1971. V. 19. No. 9. P. 661-668.
52. Dyszlewicz J. Stress formulation of the "second" axially symmetric problem of micropolar theory of elasticity. // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci techn. 1973. V. 21. No. 2. P. 87-97.
53. Eringen A.G. Suhubi E.S. Nonlinear theory of micro-elastic solids-II. // Int. J. Engng. Sci. 1964. V.2. P.389-404.

54. Gauthier R.D., Jahsman W.E. A quest for micropolar elastic constants // Trans. ASME. 1975, V. E42. No. 2. P. 369-374
55. Gauthier R.D., Jahsman W.E. A quest for micropolar elastic constants. Part 2. // Arch. Mech. 1981, V. 33. No. 5. P. 717-737
56. Gupta S.C. An inhomogeneity problem in couple stress theory. // Proc. Indian. Acad. Sci. 1976. V. A84. No. 5. P.181-193.
57. Hsu Y.C., Wang W.J. Couple-stress effects near an interior hole of an infinite elastic plane subjected to a concentrated force. // J. Franklin Inst. 1973. V. 295. No. 5. P. 411-421.
58. Itou S. The effect of couple-stress on the stress concentration around an elliptic hole. // Acta. Mech. 1973. V.16. No. 3-4. P. 289-296.
59. Kobayashi Shoichi, Fukui Takio. Effects of couple stresses on stress distribution in a ring test specimen. // Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ. 1971. V. 33. No. 4. P. 233-242.
60. Koh Severino L. A special theory of microelasticity. // Int. J. Eng. Sci. 1970. V. 8. No. 7. P. 583-593.
61. Koiter W.T. Couple-stress in the theory of elasticity // Proc. Koenigl. Acad. Wet. 1964. V. B67. No. 17. Русск. перевод. в кн. "Механика", 1965, вып.3 (91), С. 89-112.
62. Lakes R. Cosserat micromechanics of structured media experimental methods. // Third technical conference "Proceedings of the American society for composites". September 25-29, Seattle, Washington. P. 505-516.
63. Le Roux. Étude géométrique de la torsion et de la flexion // Ann. Scient. de L'École Normale Sup., Paris, 1911, V. 28

64. Marinescu C. O problema la limita de elasticitate asimetrica plana. // Bul. Univ. Brasov. 1972. V. C14. P.25-28.
65. Mindlin R.D. Influence of couple-stress on stress concentrations // Experimental Mechanics, 1963. V. 3. No. 1. P. 1-7. Русск. перевод. в кн. "Механика", 1964, вып.4 (86), С. 115-128.
66. Mindlin R.D. Tierstin H.F. Effects of couple-stress in linear elasticity. // Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1962. V. 11. No. 5. P. 415-488. Русск. перевод. в кн. "Механика", 1964, вып.4 (86), С. 80-114.
67. Mindlin R.D. Stress function for a cosserat continuum. // Int. J. Engng. Sci. 1965. V.1. P.265-271.
68. Mindlin R.D. Microstructure in Linear Elasticity. // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. V. 16. P.51-78.
69. Mindlin R.D. Galerkin stress function for non-local theories of elasticity. // Int. J. of Solid and Structures. 1972. V. 8. No. 12. P.1407-1411.
70. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua. // Lecture at the 11-th International congress of Applied Mechanics. Munchen: Technical University of Munich, 1964.
71. Sandru N. On some problems of the linear theory of the asymmetric elasticity. Int. J. Engng. Sci. 1966. V.4. P.81-94.
72. Schaefer H. Das Cosserat-Kontinuum. // ZAMM. 1967. V.47. No. 8. P. 485-498

73. Suchar M. Stress function for the "second" plane problem of micropolar elasticity. // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci techn. 1972. V. 20. No. 11. P. 831-840.
74. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stress. // Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1962. V. 11. No. 5. P. 385-413.
75. Voigt W. Theoretische Studien ueber die Elastizitaetsverhaeltnisse der Kristalle. // Abh., Gess. Wiss. Goettingen 34, 1887.