

На правах рукописи

Кулеш Михаил Александрович

**ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ
НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

01.02.04 — механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Пермь — 2001

Работа выполнена в Институте механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, г.Пермь.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Шардаков И.Н.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор,
Ерофеев В.И.

кандидат физико-математических наук,
Келлер И.Э.

Ведущая организация: Пермский государственный университет

Защита состоится 27 сентября 2001 г. в 11 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 004.012.01 в Институте механики сплошных сред УрО РАН по адресу: 614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики сплошных сред УрО РАН.

Автореферат разослан августа 2001 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
доктор технических наук

Березин И.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Задачи о деформировании материала, при котором деформация среды описывается не только вектором перемещения \vec{u} , но также вектором поворота $\vec{\omega}$, давно привлекают внимание исследователей.

В этих задачах, в отличие от классической теории, напряжённое состояние описывается несимметричным тензором напряжений, поэтому физическое поведение материала характеризуется бóльшим числом упругих констант. Необходимость подобного усложнения нередко оправдывают тем, что с помощью даваемых в классической теории упругих (и пьезоэлектрических) констант невозможна трактовка, например, аномального пьезоэффекта в кварце, дисперсии упругих волн в сплошной среде, а также упругих свойств кварца, алмаза, дигидрофосфата аммония и других кристаллов.

Истоки этой теории восходят к трудам В.Фойхта (W.Voigt), который впервые рассмотрел модель среды с вращательным взаимодействием её частиц при изучении упругих свойств кристаллов.

Первая попытка построения теории упругости с несимметричным тензором напряжений принадлежит, по-видимому, братьям Коссера (E.Cosserat, F.Cosserat). Согласно концепции братьев Коссера, учитывающей вращательное взаимодействие частиц материала, при изучении напряжённого состояния твёрдого деформируемого континуума необходимо наряду с обычными напряжениями (сила на единицу площади) вводить в рассмотрение моментные напряжения (момент силы на единицу площади). Отсюда возникло название - моментная, или несимметричная теория упругости.

Сегодня можно выделить несколько направлений развития этой теории, отличающихся способом описания поворота частиц: теория среды псевдокоссера со "стестнённым вращением" (Э.Л.Аэро и Е.В.Кувшинский, Р.Д.Миндлин и Г.Ф.Тирстен, Ю.Н.Немиш, В.Т.Койтер, Н.Ф.Морозов, Г.Н.Савин, А.И.Каландия и др.), теория среды Коссера (В.Новацкий и ряд его учеников, В.А.Пальмов, Von H. Schaefer, Э.Л.Аэро и Е.В.Кувшинский, В.И.Ерофеев и др.), микроструктурная теория (Р.Д.Миндлин), континуум Леру (Леру, В.И.Ерофеев).

В теории среды псевдокоссера сохраняется концепция классической теории упругости, т.е. считается, что перемещения \vec{u} точек этой среды и их жёсткие малые повороты $\vec{\omega}$ связаны зависимостью:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}. \quad (1)$$

Таким образом, для среды псевдокоссера имеется одна независимая кинематическая неизвестная - перемещения \vec{u} и вводятся несимметричные тензора напряжений $\tilde{\sigma}$ и моментных напряжений $\tilde{\mu}$. Этот вариант несимметричной теории понижает её полноту, так как число физических констант для изотропного упругого тела сокращается до четырёх. Кроме этого, получаемая структура уравнений такова, что если, в частности, на поверхности упругого тела заданы перемещения, то не удастся произвольно задать нормальную составляющую вектора поворота.

В теории среды Коссера для описания перемещения частиц наряду с обычным полем перемещений \vec{u} вводится кинематически независимое поле векторов $\vec{\omega}$, характеризующих малые повороты частиц; в этой теории присутствуют две кинематических неизвестных. Упругое поведение изотропной среды Коссера характеризуется шестью физическими константами.

В рамках подхода несимметричной теории получено множество результатов, более физически правдоподобных по сравнению с классической теорией упругости. Например, найдена концентрация напряжений вблизи кругового отверстия (В.А.Пальмов), решена

задача о действии сосредоточенной силы и сосредоточенного момента в безграничном упругом пространстве (N.Sandru, R.D.Mindlin), задача о равновесии полупространства (C.Marinescu, R.S.Dhaliwal, J.Dyszlewicz).

Однако все эти решения носят лишь теоретический и качественный характер, в большинстве оценок они не могут претендовать на количественное сравнение с классической теорией из-за отсутствия значений материальных констант, определяющих вклад "моментных" составляющих.

Трудность отыскания частных решений системы уравнений в перемещениях для среды Коссера обусловлена тем, что каждая из шести искомых компонент векторов перемещения и поворота входит во все шесть уравнений. Хочется отметить несколько подходов, используемых для решения этой проблемы: большинство авторов при отыскании точных аналитических решений используют функции (потенциалы) напряжений Эри, аналогичные функциям Папковича-Нейбера классической теории упругости, некоторые успешно используют различные методы интегральных преобразований, известны попытки построения решений в виде рядов, имеются также работы, где решения представляются в комплексном виде по аналогии с методом комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили классической теории.

В литературе удалось найти единственное свидетельство о реализации полной процедуры идентификации моделей такого типа для нескольких конкретных материалов (R.Lakes), так как трудности практического подтверждения теории среды Коссера обусловлены необходимостью экспериментального исследования локальных характеристик напряжённо-деформированного состояния образцов материала в условиях нагружения с обязательным наличием градиентов напряжений.

Необходимым компонентом идентификации являются решения (предпочтительно аналитические) краевых задач, соответствующих экспериментально реализуемым условиям нагружения образцов. Именно поэтому в данной работе внимание фокусируется на построении точных аналитических решений одно- и двумерных статических краевых задач для среды Коссера, которые являются, с точки зрения построения возможных схем экспериментальных исследований, достаточно актуальными.

Целью работы является построение точных аналитических решений некоторых одномерных и двумерных статических краевых задач в рамках среды Коссера; качественный и количественный анализ этих решений на предмет их сравнения с решениями аналогичных краевых задач для симметричной среды и среды псевдокоссера; определение и анализ поведения экспериментально измеряемых макровеличин, несущих в себе эффекты "моментного" поведения материала.

Научная новизна работы состоит в том, что:

- 1) Получены и приведены решения нескольких задач в рамках теории среды Коссера:
 - а) Задача о сдвиге плоского бесконечного слоя (пластины), закреплённой по обоим краям под действием силы тяжести.
 - б) Задача о кручении жёстко закреплённого по внешнему контуру кольца за счёт поворота внутреннего контура на фиксированный угол.
 - в) Задача о деформировании жёстко закреплённого по внешнему контуру кольца за счёт сдвига внутреннего контура на фиксированную величину.
 - г) Задач Кирша об одноосном растяжении бесконечной пластины, ослабленной одним центральным круговым отверстием.
 - д) Задача о деформировании тела вращения, испытывающего воздействие осесимметричной (или неосесимметричной) нагрузки.

Решения всех вышеперечисленных задач являются точными, представлены в безразмерной форме с использованием функций Бесселя различных порядков. При построении решений использовался подход, не применявшийся ранее для решения подобного класса задач.

- 2) Анализ полученных решений позволил определить соответствующие макровеличины, несущие в себе информацию о "моментном" поведении материала. Особо необходимо отметить, что все эти макровеличины могут быть экспериментально измерены.
- 3) Приведён анализ степени "отклика" введённых макровеличин на "моментное" поведение материала в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задач.

Достоверность основных научных положений и результатов подтверждается точным характером полученных аналитических решений и сравнением этих решений в частном случае среды псевдокоссера с ранее полученными результатами других авторов (напр., Р.Д.Миндлин, В.А.Пальмов).

Практическая значимость полученных результатов состоит в том, что они позволяют определить возможные схемы натуральных экспериментов для фиксации эффектов "моментного" поведения материала.

На защиту выносятся: точные аналитические решения указанных выше одномерных и двумерных краевых задач для несимметричной среды Коссера, а также подход к их получению, качественный и количественный анализ полученных решений, демонстрирующий отклик "моментного" поведения среды на внешние воздействия.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались на: VIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Пермь, 2001 г.), V-ой Всероссийской школе-семинаре "Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа" (САМГОП-2000, Пермь, 24 июня - 1 июля 2000 г.), Областной конференции молодых учёных "Молодёжная наука Прикамья" (Пермь, 2000 г.), Научных семинарах ИМСС УрО РАН (2000 г.), каф. "Математическое моделирование систем и процессов" Пермского Государственного технического университета (2001 г.), Научно-практической конференции "Прикладные пакеты программ в инженерных расчётах" (ППП-99, Пермь, 23-24 ноября 1999 г.).

Публикации. Результаты работы освещены в 6 публикациях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы, содержит 11 рисунков и 1 таблицу. Объём диссертации составляет 100 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновываются актуальность темы диссертационной работы, используемые методы исследования, научная новизна и практическая значимость. Приводятся обзор литературы, посвящённый несимметричной теории упругости, основные положения, выносимые на защиту, и краткое содержание всех глав.

В первой главе приводятся основные положения теории сред Коссера и псевдокоссера, взятые из работ В.Новацкого - уравнения равновесия и движения относительно тензоров напряжения и моментного напряжения, геометрические и определяющие соотношения, уравнения равновесия и движения для векторов перемещения и поворота:

- уравнения равновесия

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{X} = \vec{0}, \quad \vec{\sigma}^T : \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mu} + \vec{Y} = \vec{0}; \quad (2)$$

- геометрические соотношения

$$\tilde{\gamma} = \vec{\nabla} \vec{u} - \vec{E} \cdot \vec{\omega}, \quad \tilde{\chi} = \vec{\nabla} \vec{\omega}; \quad (3)$$

- физические уравнения

$$\tilde{\sigma} = 2\mu\tilde{\gamma}^{(S)} + 2\alpha\tilde{\gamma}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\gamma})\tilde{e}, \quad \tilde{\mu} = 2\gamma\tilde{\chi}^{(S)} + 2\varepsilon\tilde{\chi}^{(A)} + \beta I_1(\tilde{\chi})\tilde{e}. \quad (4)$$

С учётом соотношений (2)-(4) уравнения равновесия для вектора перемещения \vec{u} и вектора поворота $\vec{\omega}$ примут вид:

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda)\text{grad div } \vec{u} - (\mu + \alpha)\text{rot rot } \vec{u} + 2\alpha \text{rot } \vec{\omega} + \vec{X} &= \vec{0}, \\ (\beta + 2\gamma)\text{grad div } \vec{\omega} - (\gamma + \varepsilon)\text{rot rot } \vec{\omega} + 2\alpha \text{rot } \vec{u} - 4\alpha\vec{\omega} + \vec{Y} &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (5)$$

В (2)-(5) \vec{E} - тензор Леви-Чивиты третьего ранга; $(\cdot)^{(S)}$ - операция симметрирования; $(\cdot)^{(A)}$ - операция альтернирования; $\vec{\nabla}(\cdot)$ - набла-оператор; $I_1(\cdot)$ - первый инвариант тензора; \vec{X} - вектор массовых сил; \vec{Y} - вектор массовых моментов; \vec{u} - вектор перемещения; $\vec{\omega}$ - вектор поворота; $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\chi}$ - несимметричные тензоры деформаций и изгиба-кручения; $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\mu}$ - несимметричные тензоры напряжений и моментных напряжений; μ, λ - постоянные Лямэ; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ - физические постоянные материала в рамках среды Коссера.

R.D.Gauthier в своих работах, используя условие положительности внутренней энергии, установил следующие неравенства для материальных констант:

$$3\lambda + 2\mu + \alpha \geq 0, \quad 2\mu + \alpha \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad 3\beta + 2\gamma \geq 0, \quad |\gamma - \varepsilon| \leq \gamma + \varepsilon, \quad \gamma + \varepsilon \geq 0. \quad (6)$$

В диссертационной работе получены точные аналитические решения ряда плоских задач. Приведение этих решений к безразмерному виду позволило ввести три безразмерных величины, одна из которых зависит от характерного геометрического размера исследуемой области l (например, для круглой шайбы в одной из рассмотренных далее задач это может быть радиус внешнего контура, по отношению к которому проводится обезразмеривание величин размерности длины):

$$A = l \sqrt{\frac{\alpha\mu}{(\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon)}}, \quad B = \frac{\alpha + \mu}{\alpha}, \quad C = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}. \quad (7)$$

Используя (6), несложно выписать неравенства, ограничивающие значения данных величин: $A > 0$, $B \geq 1$, $|C| \leq 1$.

В диссертационной работе рассматривается также среда псевдокоссера, описываемая упрощенной теорией, в которой принято, что вектор поворота удовлетворяет соотношению (1): $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}$.

Физические соотношения среды псевдокоссера:

$$\tilde{\sigma} = 2\mu\tilde{\gamma}^{(A)} + \lambda I_1(\tilde{\gamma})\tilde{e} - \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot \tilde{\mu} \cdot \vec{E}, \quad \tilde{\mu} = 2\gamma\tilde{\chi}^{(S)} + 2\varepsilon\tilde{\chi}^{(A)} + \beta I_1(\tilde{\chi})\tilde{e}. \quad (8)$$

Для нахождения компонент тензоров деформаций и изгиба-кручения, как и в постановке среды Коссера, используются соотношения (3). Однако, с учётом (8), уравнения равновесия для среды псевдокоссера примут иной вид, отличный от (5):

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\mu + \lambda)\text{grad div } \vec{u} + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\text{rot rot } \nabla^2 \vec{u} + \vec{X} = \vec{0}. \quad (9)$$

Кроме констант Лямэ λ и μ в уравнения в перемещениях входят две новые постоянные γ и ε . Среда псевдокоссера является следствием среды Коссера при условии $\alpha \rightarrow \infty$.

К уравнениям в перемещениях (9) следует добавить граничные условия. Необходимо отметить, что структура уравнений в перемещениях не соответствует шести граничным условиям. Если на поверхности заданы перемещения, то не удастся независимо выразить нормальную составляющую вектора поворота. Мы имеем пять кинематических граничных условий. Аналогично обстоит дело и с условиями в нагрузках.

Во второй главе рассматривается решение задачи о сдвиговом деформировании слоя (пластины). Плоский бесконечный слой (пластина) шириной l находится в равновесии в поле массовых сил интенсивности f , действующих вдоль оси Oy (Рис. 1). Левая ($x = 0$) и правая ($x = l$) грани закреплены:

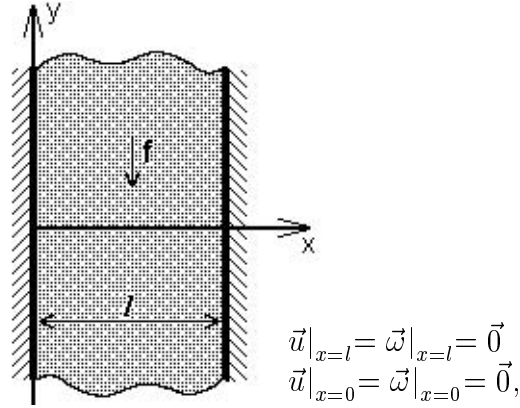


Рис. 1.

Найдено решение данной задачи в рамках среды Коссера:

$$\begin{aligned}
 u_y(x) &= C_1 + C_2x + C_3e^{2Ax} + C_4e^{-2Ax} + \frac{f}{2}x^2, \\
 \omega_z(x) &= \frac{C_2}{2} + C_3ABe^{2Ax} - C_4ABe^{-2Ax} + \frac{f}{2}x, \\
 \gamma_{xy}(x) &= \frac{C_2}{2} - C_3A(B-2)e^{2Ax} + C_4A(B-2)e^{-2Ax} + \frac{f}{2}x, \\
 \gamma_{yx}(x) &= \frac{C_2}{2} + C_3ABe^{2Ax} - C_4ABe^{-2Ax} + \frac{f}{2}x, \\
 \chi_{xz}(x) &= 2C_3A^2Be^{2Ax} + 2C_4A^2Be^{-2Ax} + \frac{f}{2}, \\
 \sigma_{xy}(x) &= fx + C_2, \quad \sigma_{yx}(x) = fx + C_2 + 4C_3Ae^{2Ax} - 4C_4Ae^{-2Ax}, \\
 \mu_{xz}(x) &= 2C_3e^{2Ax} + 2C_4e^{-2Ax} + \frac{f}{2A^2B}, \quad \mu_{zx}(x) = C\mu_{xz}(x).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Граничные условия дают систему линейных алгебраических уравнений, из которой определяются константы C_1, \dots, C_4 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & AB & -AB \\ 1 & 1 & e^{2A} & e^{-2A} \\ 0 & \frac{1}{2} & AB e^{2A} & -AB e^{-2A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{f}{2} \\ -\frac{f}{2} \end{bmatrix}.$$

В третьей главе рассматривается решение задачи о кручении плоского кольца, жёстко закреплённого по внешнему контуру $\rho = R_1$ (Рис. 2). Кручение осуществляется за счёт поворота внутреннего контура $\rho = R_0$ на угол φ_0 .

Граничные условия для искомых функций примут вид: $u_\varphi|_{\rho=R_0} = \varphi_0 \cdot R_0$, $\omega_z|_{\rho=R_0} = \varphi_0$, $u_\varphi|_{\rho=R_1} = 0$, $\omega_z|_{\rho=R_1} = 0$.

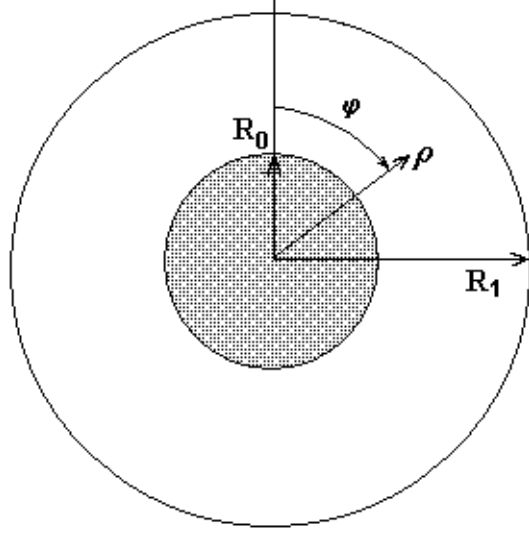


Рис. 2.

В силу симметрии, решение уравнений (5) этой задачи для континуума Коссера в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) сводится к нахождению ненулевых компонент вектора углового перемещения $u_\varphi(\rho)$, и вектора поворота $\omega_z(\rho)$ относительно оси z : $\vec{u}(\rho) = \{0, u_\varphi(\rho), 0\}$, $\vec{\omega}(\rho) = \{0, 0, \omega_z(\rho)\}$:

$$\begin{aligned}
 u_\varphi(\rho) &= C_1\rho + C_2\frac{1}{\rho} - C_3\frac{I_1(2A\rho)}{2A^2} - C_4\frac{K_1(2A\rho)}{2A^2}, \\
 \omega_z(\rho) &= C_1 - C_3\frac{BI_0(2A\rho)}{2A} + C_4\frac{BK_0(2A\rho)}{2A}, \\
 \sigma_{\rho\varphi}(\rho) &= -\frac{2C_2}{\rho^2} + C_3\frac{I_1(2A\rho)}{2A^2\rho} + C_4\frac{K_1(2A\rho)}{2A^2\rho}, \\
 \sigma_{\varphi\rho}(\rho) &= -\frac{2C_2}{\rho^2} + C_3\left(\frac{I_1(2A\rho)}{2A^2\rho} - \frac{2I_0(2A\rho)}{A}\right) + C_4\left(\frac{K_1(2A\rho)}{2A^2\rho} + \frac{2K_0(2A\rho)}{A}\right), \\
 \mu_{\rho z}(\rho) &= -C_3\frac{I_1(2A\rho)}{2A^2} - C_4\frac{K_1(2A\rho)}{2A^2}, \\
 M &= \int_0^{2\pi} \sigma_{\rho\varphi}(R_0)R_0^2d\varphi + \int_0^{2\pi} \mu_{\rho z}(R_0)R_0d\varphi.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Константы C_1, \dots, C_4 определяются из краевых условий для конкретных значений безразмерных величин A и B из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} R_0 & \frac{1}{R_0} & -\frac{I_1(2AR_0)}{2A^2} & -\frac{K_1(2AR_0)}{2A^2} \\ 1 & 0 & -\frac{BI_0(2AR_0)}{2A} & \frac{BK_0(2AR_0)}{2A} \\ R_1 & \frac{1}{R_1} & -\frac{I_1(2AR_1)}{2A^2} & -\frac{K_1(2AR_1)}{2A^2} \\ 1 & 0 & -\frac{BI_0(2AR_1)}{2A} & \frac{BK_0(2AR_1)}{2A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0 R_0 \\ \varphi_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В четвёртой главе рассматривается решение задачи о деформировании плоского кольца, жёстко закреплённого по внешнему контуру $\rho = R_1$ (Рис. 3). Деформирование кольца осуществляется за счёт жёсткого смещения внутреннего контура $\rho = R_0$ на величину d .

Граничные условия: $u_\rho|_{\rho=R_0} = -d \cos(\varphi)$, $u_\varphi|_{\rho=R_0} = d \sin(\varphi)$, $\omega_z|_{\rho=R_0} = 0$, $u_\rho = u_\varphi = \omega_z|_{\rho=R_1} = 0$.

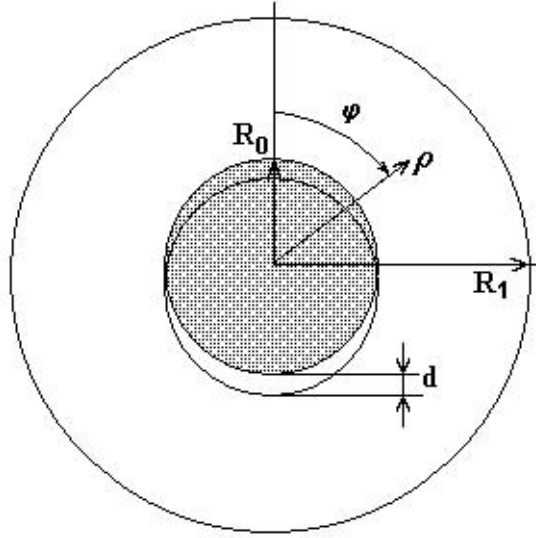


Рис. 3.

В силу симметрии, решение (5) для этой задачи получено в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) в разложении по азимутальному углу в виде:

$$\vec{u}(\rho, \varphi) = \{U(\rho) \cos(\varphi), V(\rho) \sin(\varphi), 0\}, \quad \vec{\omega}(\rho, \varphi) = \{0, 0, \omega(\rho) \sin(\varphi)\}:$$

$$\begin{aligned} u_\rho(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} + C_3 \rho^2 + C_4 \ln(\rho) + C_5 \frac{I_1(2A\rho)}{\rho} + C_6 \frac{K_1(2A\rho)}{\rho} \right), \\ u_\varphi(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(-C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} + C_3 \frac{3\lambda + 5\mu}{\mu - \lambda} \rho^2 - C_4 \left\{ \ln(\rho) + \frac{\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + C_5 \left\{ \frac{I_1(2A\rho)}{\rho} - 2AI_0(2A\rho) \right\} + C_6 \left\{ \frac{K_1(2A\rho)}{\rho} + 2AK_0(2A\rho) \right\} \right), \\ \omega_z(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(C_3 \frac{8\mu + 4\lambda}{\mu - \lambda} \rho - \frac{C_4(2\mu + \lambda)}{(3\mu + \lambda)\rho} - 2A^2 BI_1(2A\rho)C_5 - 2A^2 BK_1(2A\rho)C_6 \right), \\ \sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(-C_2 \frac{4}{\rho^3} + C_3 \frac{4(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho + C_4 \frac{2(3\mu + 2\lambda)}{(3\mu + \lambda)\rho} + C_5 S_{\rho\rho}^{(5)}(\rho) + C_6 S_{\rho\rho}^{(6)}(\rho) \right), \\ \sigma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(-C_2 \frac{4}{\rho^3} + C_3 \frac{4(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho - C_4 \frac{2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} + C_5 S_{\rho\varphi}^{(5)}(\rho) + C_6 S_{\rho\varphi}^{(6)}(\rho) \right), \\ \sigma_{\varphi\rho}(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(-C_2 \frac{4}{\rho^3} + C_3 \frac{4(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho - C_4 \frac{2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} + C_5 S_{\varphi\rho}^{(5)}(\rho) + C_6 S_{\varphi\rho}^{(6)}(\rho) \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(C_2 \frac{4}{\rho^3} + C_3 \frac{12(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho - C_4 \frac{2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} + C_5 S_{\varphi\varphi}^{(5)}(\rho) + C_6 S_{\varphi\varphi}^{(6)}(\rho) \right), \\ \mu_{\rho z}(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(C_3 \frac{4(2\mu + \lambda)}{(\mu - \lambda)A^2 B} + C_4 \frac{2\mu + \lambda}{(3\mu + \lambda)A^2 B\rho^2} + C_5 M_{\rho z}^{(5)}(\rho) + C_6 M_{\rho z}^{(6)}(\rho) \right), \\ \mu_{\varphi z}(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(C_3 \frac{4(2\mu + \lambda)}{(\mu - \lambda)A^2 B} - C_4 \frac{2\mu + \lambda}{(3\mu + \lambda)A^2 B\rho^2} + C_5 M_{\varphi z}^{(5)}(\rho) + C_6 M_{\varphi z}^{(6)}(\rho) \right), \\ \mu_{z\rho}(\rho, \varphi) &= C\mu_{\rho z}(\rho, \varphi), \quad \mu_{z\varphi}(\rho, \varphi) = C\mu_{\varphi z}(\rho, \varphi), \\ F_y &= \int_0^{2\pi} (\sigma_{\rho\varphi}(R_0, \varphi) \sin(\varphi) + \sigma_{\rho\rho}(R_0, \varphi) \cos(\varphi)) R_0 d\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Функции, зависящие от ρ , введённые в выражении (12) и соответствующие частным

решениям, определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
U_5(\rho) &= \frac{I_1(2A\rho)}{\rho}, & U_6(\rho) &= \frac{K_1(2A\rho)}{\rho}, \\
V_5(\rho) &= \frac{I_1(2A\rho)}{\rho} - 2AI_0(2A\rho), & V_6(\rho) &= \frac{K_1(2A\rho)}{\rho} + 2AK_0(2A\rho), \\
\omega_5(\rho) &= 2A^2BI_1(2A\rho), & \omega_6(\rho) &= -2A^2BK_1(2A\rho), \\
S_{\rho\rho}^{(5)}(\rho) &= \frac{4A}{\rho}I_0(2A\rho) - \frac{4}{\rho^2}I_1(2A\rho), & S_{\rho\rho}^{(6)}(\rho) &= -\frac{4A}{\rho}K_0(2A\rho) - \frac{4}{\rho^2}K_1(2A\rho), \\
S_{\rho\varphi}^{(5)}(\rho) &= \frac{4A}{\rho}I_0(2A\rho) - \frac{4}{\rho^2}I_1(2A\rho), & S_{\rho\varphi}^{(6)}(\rho) &= -\frac{4A}{\rho}K_0(2A\rho) - \frac{4}{\rho^2}K_1(2A\rho), \\
S_{\varphi\rho}^{(5)}(\rho) &= \frac{4A}{\rho}I_0(2A\rho) - \frac{4 + 8A^2\rho^2}{\rho^2}I_1(2A\rho), & S_{\varphi\rho}^{(6)}(\rho) &= -\frac{4A}{\rho}K_0(2A\rho) - \frac{4 + 8A^2\rho^2}{\rho^2}I_1(2A\rho), \\
S_{\varphi\varphi}^{(5)}(\rho) &= -\frac{4A}{\rho}I_0(2A\rho) + \frac{4}{\rho^2}I_1(2A\rho), & S_{\varphi\varphi}^{(6)}(\rho) &= \frac{4A}{\rho}K_0(2A\rho) + \frac{4}{\rho^2}K_1(2A\rho), \\
M_{\rho z}^{(5)}(\rho) &= -4AI_0(2A\rho) + \frac{2}{\rho}I_1(2A\rho), & M_{\rho z}^{(6)}(\rho) &= 4AK_0(2A\rho) + \frac{2}{\rho}K_1(2A\rho), \\
M_{\varphi z}^{(5)}(\rho) &= -\frac{2}{\rho}I_1(2A\rho), & M_{\varphi z}^{(6)}(\rho) &= -\frac{2}{\rho}K_1(2A\rho).
\end{aligned}$$

Константы C_1, \dots, C_6 определяются из краевых условий, записанных в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix}
1 & \frac{1}{R_0^2} & R_0^2 & \ln(R_0) & U_5(R_0) & U_6(R_0) \\
-1 & \frac{1}{R_0^2} & \frac{R_0^2(3\lambda+5\mu)}{\mu-\lambda} & -\frac{\mu+\lambda}{3\mu+\lambda} \ln(R_0) & V_5(R_0) & V_6(R_0) \\
0 & 0 & \frac{R_0(4\lambda+8\mu)}{\mu-\lambda} & -\frac{2\mu+\lambda}{R_0(3\mu+\lambda)} & \omega_5(R_0) & \omega_6(R_0) \\
1 & \frac{1}{R_1^2} & R_1^2 & \ln(R_1) & U_5(R_1) & U_6(R_1) \\
-1 & \frac{1}{R_1^2} & \frac{R_1^2(3\lambda+5\mu)}{\mu-\lambda} & -\frac{\mu+\lambda}{3\mu+\lambda} \ln(R_1) & V_5(R_1) & V_6(R_1) \\
0 & 0 & \frac{R_1(4\lambda+8\mu)}{\mu-\lambda} & -\frac{2\mu+\lambda}{R_1(3\mu+\lambda)} & \omega_5(R_1) & \omega_6(R_1)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
C_1 \\
C_2 \\
C_3 \\
C_4 \\
C_5 \\
C_6
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d \\
d \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}.$$

В пятой главе рассматривается решение задачи Кирша о растяжении бесконечной плоскости, ослабленной круговым отверстием.

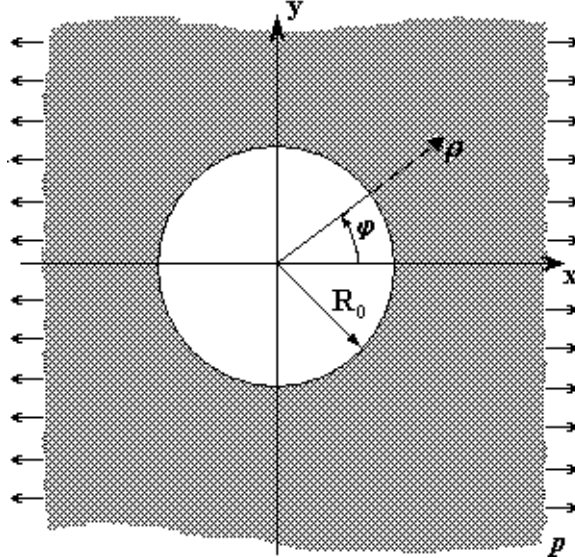


Рис. 4.

Края кругового отверстия свободны от внешних напряжений, а на бесконечности действует растягивающее усилие постоянной интенсивности p в направлении оси Ox (Рис. 4):

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}|_{\rho=R_0} &= 0, & \sigma_{\rho\varphi}|_{\rho=R_0} &= 0, & \mu_{\rho z}|_{\rho=R_0} &= 0, \\
\sigma_{\rho\rho}|_{\rho \rightarrow \infty} &= p, & \sigma_{\rho\varphi}|_{\rho \rightarrow \infty} &= p, & \mu_{\rho z}|_{\rho \rightarrow \infty} &= 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Впервые, в рамках классической теории упругости, эта задача была решена Киршем (Kirsh), позднее, несколько иным путём, Н.И.Мухелишвили. Обобщение этой задачи на случай среды псевдокоссера можно найти в работе R.D.Mindlin.

В.А.Пальмовым была найдена концентрация напряжений вблизи кругового отверстия в рамках среды Коссера. Следует однако отметить, что это решение не позволяет в полной мере проанализировать напряжённно-деформированное состояние в окрестности кругового отверстия, в частности, охарактеризовать степень искажения отверстия при деформировании.

Найдено решение данной задачи в рамках среды Коссера, которое в силу симметрии в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) представимо в виде: $\vec{u}(\rho, \varphi) = \{F(\rho) + U(\rho) \cos(2\varphi), V(\rho) \sin(2\varphi), 0\}$, $\vec{\omega}(\rho, \varphi) = \{0, 0, \omega(\rho) \sin(2\varphi)\}$:

$$\begin{aligned}
u_\rho(\rho, \varphi) &= C_1\rho + \frac{C_2}{\rho} + \left(\frac{C_3}{\rho^3} + \frac{C_4}{\rho} + C_5\rho + C_6\rho^3 + C_7U_7(\rho) + C_8U_8(\rho) \right) \cos(2\varphi), \\
u_\varphi(\rho, \varphi) &= \left(\frac{C_3}{\rho^3} - C_4\frac{\kappa-1}{(\kappa+1)\rho} - C_5\rho - C_6\frac{\kappa+3}{\kappa-3}\rho^3 + C_7V_7(\rho) + C_8V_8(\rho) \right) \sin(2\varphi), \\
\omega_z(\rho, \varphi) &= \left(\frac{C_4}{\rho^2} - C_6\frac{3(\kappa+1)}{3-\kappa}\rho^2 + C_7\omega_7(\rho) + C_8\omega_8(\rho) \right) \sin(2\varphi), \\
\sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi) &= \frac{4C_1}{\kappa-1} - \frac{2C_2}{\rho^2} + \left(-C_3\frac{6}{\rho^4} - \frac{8C_4}{(\kappa+1)\rho^2} + 2C_5 + C_7S_{\rho\rho}^{(7)}(\rho) + C_8S_{\rho\rho}^{(8)}(\rho) \right) \cos(2\varphi), \\
\sigma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) &= \left(-C_3\frac{6}{\rho^4} - \frac{4C_4}{(\kappa+1)\rho^2} - 2C_5 - \frac{12C_6}{3-\kappa}\rho^2 + C_7S_{\rho\varphi}^{(7)}(\rho) + C_8S_{\rho\varphi}^{(8)}(\rho) \right) \sin(2\varphi), \\
\sigma_{\varphi\rho}(\rho, \varphi) &= \left(-C_3\frac{6}{\rho^4} - \frac{4C_4}{(\kappa+1)\rho^2} - 2C_5 - \frac{12C_6}{3-\kappa}\rho^2 + C_7S_{\varphi\rho}^{(7)}(\rho) + C_8S_{\varphi\rho}^{(8)}(\rho) \right) \sin(2\varphi), \\
\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) &= \frac{4C_1}{\kappa-1} + \frac{2C_2}{\rho^2} + \left(C_3\frac{6}{\rho^4} - 2C_5 - \frac{24C_6}{3-\kappa}\rho^2 + C_7S_{\varphi\varphi}^{(7)}(\rho) + C_8S_{\varphi\varphi}^{(8)}(\rho) \right) \cos(2\varphi), \\
\mu_{\rho z}(\rho, \varphi) &= \left(-\frac{2C_4}{A^2B\rho^3} - \frac{6(\kappa+1)C_6}{(3-\kappa)A^2B}\rho + C_7M_{\rho z}^{(7)}(\rho) + C_8M_{\rho z}^{(8)}(\rho) \right) \sin(2\varphi), \\
\mu_{\varphi z}(\rho, \varphi) &= \left(\frac{2C_4}{A^2B\rho^3} - \frac{6(\kappa+1)C_6}{(3-\kappa)A^2B}\rho + C_7M_{\varphi z}^{(7)}(\rho) + C_8M_{\varphi z}^{(8)}(\rho) \right) \cos(2\varphi), \\
\mu_{z\rho}(\rho, \varphi) &= C\mu_{\rho z}(\rho, \varphi), \quad \mu_{z\varphi}(\rho, \varphi) = C\mu_{\varphi z}(\rho, \varphi), \quad D = \left| \frac{u_\rho(R_0, 0)}{u_\rho(R_0, \frac{\pi}{2})} \right|.
\end{aligned} \tag{14}$$

Функции от ρ , стоящие при константах C_7 и C_8 в выражении (14), определяются соответствующими "моментными" частными решениями:

$$\begin{aligned}
U_7(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho}I_0(2A\rho) - \frac{1}{A^3\rho^2}I_1(2A\rho), & U_8(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho}K_0(2A\rho) + \frac{1}{A^3\rho^2}K_1(2A\rho), \\
V_7(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho}I_0(2A\rho) - \frac{1+A^2\rho^2}{A^3\rho^2}I_1(2A\rho), & V_8(\rho) &= \frac{1}{A^2\rho}K_0(2A\rho) + \frac{1+A^2\rho^2}{A^3\rho^2}K_1(2A\rho), \\
\omega_7(\rho) &= -BI_0(2A\rho) + \frac{B}{A\rho}I_1(2A\rho), & \omega_8(\rho) &= -BK_0(2A\rho) - \frac{B}{A\rho}K_1(2A\rho), \\
S_{\rho\rho}^{(7)}(\rho) &= -\frac{6}{A^2\rho^2}I_0(2A\rho) + \frac{6+4A^2\rho^2}{A^3\rho^3}I_1(2A\rho), \\
S_{\rho\rho}^{(8)}(\rho) &= -\frac{6}{A^2\rho^2}K_0(2A\rho) - \frac{6+4A^2\rho^2}{A^3\rho^3}K_1(2A\rho),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\rho\varphi}^{(7)}(\rho) &= -\frac{6}{A^2\rho^2}I_0(2A\rho) + \frac{6+2A^2\rho^2}{A^3\rho^3}I_1(2A\rho), \\
S_{\rho\varphi}^{(8)}(\rho) &= -\frac{6}{A^2\rho^2}K_0(2A\rho) - \frac{6+2A^2\rho^2}{A^3\rho^3}K_1(2A\rho), \\
S_{\varphi\rho}^{(7)}(\rho) &= -\frac{6+4A^2\rho^2}{A^2\rho^2}I_0(2A\rho) + \frac{6+6A^2\rho^2}{A^3\rho^3}I_1(2A\rho), \\
S_{\varphi\rho}^{(8)}(\rho) &= -\frac{6+4A^2\rho^2}{A^2\rho^2}K_0(2A\rho) - \frac{6+6A^2\rho^2}{A^3\rho^3}K_1(2A\rho), \\
S_{\varphi\varphi}^{(7)}(\rho) &= \frac{6}{A^2\rho^2}I_0(2A\rho) - \frac{6+4A^2\rho^2}{A^3\rho^3}I_1(2A\rho), & S_{\varphi\varphi}^{(8)}(\rho) &= \frac{6}{A^2\rho^2}K_0(2A\rho) + \frac{6+4A^2\rho^2}{A^3\rho^3}K_1(2A\rho), \\
M_{\rho z}^{(7)}(\rho) &= \frac{2}{A^2\rho}I_0(2A\rho) - \frac{2+2A^2\rho^2}{A^3\rho^2}I_1(2A\rho), & M_{\rho z}^{(8)}(\rho) &= \frac{2}{A^2\rho}K_0(2A\rho) + \frac{2+2A^2\rho^2}{A^3\rho^2}K_1(2A\rho), \\
M_{\varphi z}^{(7)}(\rho) &= -\frac{2}{A^2\rho}I_0(2A\rho) + \frac{2}{A^3\rho^2}I_1(2A\rho), & M_{\varphi z}^{(8)}(\rho) &= -\frac{2}{A^2\rho}K_0(2A\rho) - \frac{2}{A^3\rho^2}K_1(2A\rho).
\end{aligned}$$

Используя граничные условия (13), определены константы C_1, \dots, C_8 :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{p(\kappa-1)}{8}, & C_2 &= \frac{pR_0^2}{4}, \\
C_3 &= -\frac{pR_0^4}{4} \cdot \left(\frac{2L(BL^2+4\kappa+4)K_0(L)}{L^2(2BLK_0(L)+(BL^2+4B+2\kappa+2)K_1(L))} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(BL^4+4BL^2+2L^2+2L^2\kappa+16\kappa+16)K_1(L)}{L^2(2BLK_0(L)+(BL^2+4B+2\kappa+2)K_1(L))} \right), \\
C_4 &= \frac{pR_0^2(\kappa+1)}{4} \cdot \frac{B(2LK_0(L)+(4+L^2)K_1(L))}{2BLK_0(L)+(BL^2+4B+2\kappa+2)K_1(L)}, \\
C_5 &= \frac{p}{4}, & C_6 &= 0, & C_7 &= 0, & C_8 &= \frac{p(\kappa+1)L}{2(2BLK_0(L)+(BL^2+4B+2\kappa+2)K_1(L))}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь для сокращения записи введена безразмерная величина $L = 2AR_0$.

В шестой главе приведено обобщение решений краевых задач (гл. 3-5) на случай тела вращения. Предполагается, что напряжённо-деформированное состояние такого тела в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) зависит только от координат ρ и φ . Данный класс задач характеризуется тем, что решение для него можно представить в виде отрезка ряда Фурье:

$$\begin{aligned}
\vec{u}(\rho, \varphi) &= \{u_\rho(\rho, \varphi), u_\varphi(\rho, \varphi), 0\}, \\
u_\rho(\rho, \varphi) &= U^{(0)}(\rho) + U^{(1)}(\rho) \cos(\varphi) + \sum_{n=2}^N U^{(n)}(\rho) \cos(n\varphi), \\
u_\varphi(\rho, \varphi) &= V^{(0)}(\rho) + V^{(1)}(\rho) \sin(\varphi) + \sum_{n=2}^N V^{(n)}(\rho) \sin(n\varphi), \\
\vec{\omega}(\rho, \varphi) &= \{0, 0, \omega_z(\rho, \varphi)\}, \\
\omega_z(\rho, \varphi) &= \omega^{(0)}(\rho) + \omega^{(1)}(\rho) \sin(\varphi) + \sum_{n=2}^N \omega^{(n)}(\rho) \sin(n\varphi).
\end{aligned} \tag{16}$$

Такая форма записи решения будет соответствовать полному ряду Фурье, если в соотношениях (16) $\cos(\cdot)$ заменить на $\sin(\cdot)$, а $\sin(\cdot)$ на $-\cos(\cdot)$. При такой замене разрешающие системы дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье будут в точности соответствовать по виду системам, полученным в данной главе.

Для $U^{(0)}(\rho)$ решение известно. В диссертационной работе ему соответствуют соотношения задачи о кручении кольца (гл. 3). Решение для $V^{(0)}(\rho)$ и $\omega^{(0)}(\rho)$ получено в рамках

задачи о кручении плоского кольца (11) и в данном случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U^{(0)}(\rho) &= C_1^{(0)}\rho + C_2^{(0)}\frac{1}{\rho}, \\ V^{(0)}(\rho) &= C_3^{(0)}\rho + \frac{C_4^{(0)}}{\rho} - C_5^{(0)}\frac{I_1(2A\rho)}{2A^2} - C_6^{(0)}\frac{K_1(2A\rho)}{2A^2}, \\ \omega^{(0)}(\rho) &= C_3^{(0)} - C_5^{(0)}\frac{BI_0(2A\rho)}{2A} + C_6^{(0)}\frac{BK_0(2A\rho)}{2A}. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение для первой гармоники было получено в гл. 4 в рамках решения задачи о деформировании плоского кольца (12):

$$\begin{aligned} U^{(1)}(\rho) &= C_1^{(1)} + \frac{C_2^{(1)}}{\rho^2} + C_3^{(1)}\rho^2 + C_4^{(1)}\ln(\rho) + C_5^{(1)}\frac{I_1(2A\rho)}{\rho} + C_6^{(1)}\frac{I_1(2A\rho)}{\rho}, \\ V^{(1)}(\rho) &= -C_1^{(1)} + \frac{C_2^{(1)}}{\rho^2} + C_3^{(1)}\frac{3\lambda + 5\mu}{\mu - \lambda}\rho^2 - C_4^{(1)}\left\{\ln(\rho) + \frac{\mu + \lambda}{3\mu + \lambda}\right\} + \\ &+ C_5^{(1)}\left\{\frac{I_1(2A\rho)}{\rho} - 2AI_0(2A\rho)\right\} + C_6^{(1)}\left\{\frac{K_1(2A\rho)}{\rho} + 2AK_0(2A\rho)\right\}, \\ w^{(1)}(\rho) &= C_3^{(1)}\frac{8\mu + 4\lambda}{\mu - \lambda}\rho - C_4^{(1)}\frac{2\mu + \lambda}{(3\mu + \lambda)\rho} - 2A^2BI_1(2A\rho)C_5^{(1)} - 2A^2BK_1(2A\rho)C_6^{(1)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Полученное в данной главе решение для старших гармоник в рамках среды Коссера имеет более сложный вид:

$$\begin{aligned} U^{(n)}(\rho) &= \frac{C_1^{(n)}}{\rho^{(n+1)}} + \frac{C_2^{(n)}}{\rho^{(n-1)}} + C_3^{(n)}\rho^{(n-1)} + C_4^{(n)}\rho^{(n+1)} + \frac{C_5^{(n)}}{\rho}I_n(2A\rho) + \frac{C_6^{(n)}}{\rho}K_n(2A\rho), \\ V^{(n)}(\rho) &= \frac{C_1^{(n)}}{\rho^{(n+1)}} + C_2^{(n)}\frac{n\lambda - 2\lambda + n\mu - 4\mu}{n\lambda + n\mu + 2\mu}\frac{1}{\rho^{(n-1)}} - C_3^{(n)}\rho^{(n-1)} - \\ &- C_4^{(n)}\frac{n\lambda + 2\lambda + n\mu + 4\mu}{n\lambda + n\mu - 2\mu}\rho^{(n+1)} + C_5^{(n)}\left\{\frac{I_n(2A\rho)}{\rho} - \frac{2A}{n}I_{n-1}(2A\rho)\right\} + \\ &+ C_6^{(n)}\left\{\frac{K_n(2A\rho)}{\rho} + \frac{2A}{n}K_{n-1}(2A\rho)\right\}, \\ \omega^{(n)}(\rho) &= C_2^{(n)}\frac{2n\lambda - 2\lambda + 4n\mu - 4\mu}{n\lambda + n\mu + 2\mu}\frac{1}{\rho^n} - C_4^{(n)}\frac{2n\lambda + 2\lambda + 4n\mu + 4\mu}{n\lambda + n\mu - 2\mu}\rho^n - \\ &- C_5^{(n)}\frac{2A^2B}{n}I_n(2A\rho) - C_6^{(n)}\frac{2A^2B}{n}K_n(2A\rho). \end{aligned} \quad (19)$$

Константы при частных решениях в соотношениях (17)-(19) определяются из краевых условий соответствующих задач.

Соотношения (17)-(19) будут являться также и решениями уравнения (9), описывающего краевую задачу для среды псевдокоссера, если $B = 1$ (7), что соответствует ситуации $\alpha \rightarrow \infty$. Это утверждение также можно доказать, используя методику, описанную в шестой главе диссертационной работы.

В седьмой, заключительной главе осуществляется параметрический анализ полученных решений. Эти решения позволяют наглядно провести сравнение напряжённо-деформированного состояния на различных границах рассмотренных областей в рамках среды Коссера, среды псевдокоссера и симметричной среды. Акцент в этом сравнении сделан на возможность использования полученных решений с точки зрения возможности реализации и интерпретации эксперимента.

Сравнивая безразмерные формы записи решений (10), (11), (12), (14) с их классическими аналогами, отмечается, что решения, полученные в рамках несимметричной теории, являются функциями характерного геометрического размера, в то время как классические

от него не зависит. Из этого можно предположить, что при фиксированных материальных константах среды Коссера и параметрах нагружения есть возможность нахождения такого характерного геометрического размера, при котором различия "моментного" и классического решений будут значительными.

Графические зависимости, представленные в работе, позволяют сделать вывод о том, что в качестве экспериментально измеряемых макровеличин можно выбрать:

- 1) Для первой задачи максимальное осевое смещение $u_y(l/2)$ (10).
- 2) Для второй задачи крутящий момент на внутреннем контуре M (11). Величину этого макромомента в меньшей степени определяет компонента $\sigma_{\rho\varphi}(R_0)$ тензора напряжений, которая для рассмотренного материала имеет незначительное отклонение от классического значения (0.3%) и в большей степени компонента $\mu_{\rho z}(R_0)$ тензора моментных напряжений.
- 3) Для третьей задачи осевую силу реакции внутреннего контура F (12). Значение этой силы в основном определяется величиной компоненты $\sigma_{\rho\varphi}(R_0, \varphi)$ тензора напряжений, которая имеет значительные различия в классическом случае и в случае среды Коссера и в меньшей степени компонентой $\sigma_{\rho\rho}(R_0, \varphi)$, которая имеет незначительные отличия от классического случая.
- 4) Для четвертой задачи параметр D (14), характеризующий степень искажения контура кругового отверстия. Этот параметр имеет значительные отличия в случаях классической и несимметричной среды.

Для оценки информативности каждой задачи с точки зрения проявления несимметричного эффекта поведения материала сконструированы относительные параметры, характеризующие степень отличия "моментных" решений от классических по введенным макровеличинам. Эти параметры имеют вид:

- для задачи о сдвиге

$$\delta_1 = \left| \frac{u_y(l/2) - u_y^*(l/2)}{u_y^*(l/2)} \right| \cdot 100\%; \quad (20)$$

- для задачи о кручении

$$\delta_2 = \left| \frac{M - M^*}{M^*} \right| \cdot 100\%; \quad (21)$$

- для задачи о деформировании плоского кольца

$$\delta_3 = \left| \frac{F_y - F_y^*}{F_y^*} \right| \cdot 100\%; \quad (22)$$

- для задачи Кирша

$$\delta_4 = \left| \frac{D - D^*}{D^*} \right| \cdot 100\%. \quad (23)$$

Приводятся графические зависимости для введенных относительных параметров (Рис. 5). Сплошной линией обозначено решение, соответствующее среде Коссера, пунктирной - среде псевдокоссера.

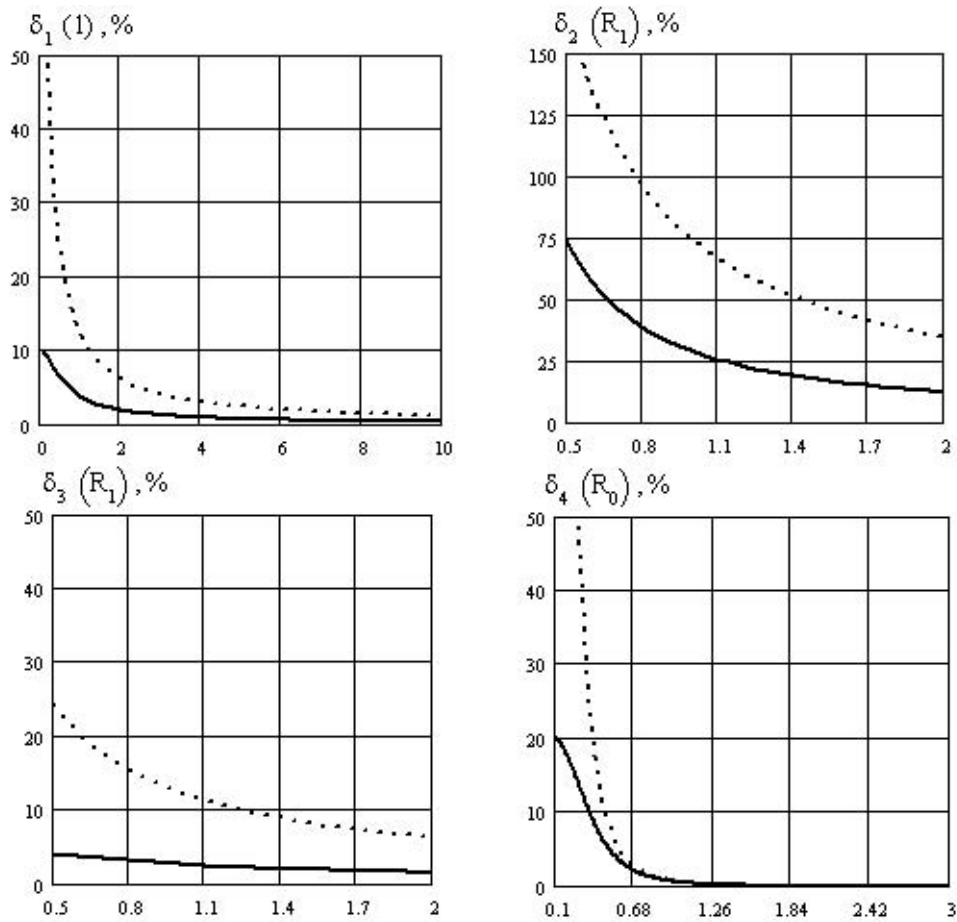


Рис. 5.

Для построения зависимостей использовались значения материальных констант для синтетического полиуретана (R.Lakes): $\lambda = 2.096 \cdot 10^9 \text{ з}$, $\mu = 1.033 \cdot 10^9 \text{ з}$, $\alpha = 1.148 \cdot 10^8 \text{ з}$, $\gamma = 4.1 \cdot 10^6$, $\varepsilon = 1.312 \cdot 10^5$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В данной работе получены следующие новые результаты:

- 1) Предложен подход к построению точных аналитических решений некоторых одномерных и двумерных статических краевых задач в рамках несимметричной теории упругости для среды Коссера.
- 2) С использованием данного подхода получены точные аналитические решения ряда задач, записанные в безразмерной форме через функции Бесселя.
- 3) На основе анализа поведения полученных решений введены экспериментально измеряемые макропараметры, откликающиеся на "моментное" поведение среды.

Качественный и численный анализ аналитических решений и введённых макропараметров позволяет сделать ряд выводов:

- 1) Безразмерная форма записи полученных аналитических решений позволяет наглядно установить принципиальное различие безразмерных "моментных" и классических

решений. А именно, безразмерное "моментное" решение зависит от характерного геометрического размера, а классическое - нет.

- 2) Все введённые относительные макропараметры (20)-(23) возрастают по мере уменьшения характерного геометрического размера. В задаче о кручении кольца наблюдается неограниченное возрастание этой степени различий. В остальных задачах степень различия, при фиксированных материальных константах, видимо имеет конечный предел при неограниченном уменьшении толщины слоя за счёт уменьшения характерного геометрического размера.
- 3) Наибольшая степень возрастания имеет место для величины δ_2 , соответствующей задаче о кручении. Однако, с точки зрения простоты экспериментальной схемы и надёжности измерений, более привлекательной является величина δ_4 задачи Кирша. В задачах о сдвиге плоского слоя и деформировании плоского кольца несимметричные эффекты поведения материала проявляются, по-видимому, незначительно.
- 4) Полученные решения и введённые макропараметры (20)-(23) в значительной степени позволяют определить схему эксперимента и необходимую точность измерений, а также методы обработки экспериментальных данных с целью обнаружения эффектов поведения материала, предсказываемых несимметричной теорией упругости для среды Коссера.

Основное содержание диссертационной работы изложено в следующих публикациях:

- 1) Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитического решения некоторой двумерной задачи несимметричной теории упругости // Вестник ПГТУ. Вычислительная математика и механика. - Пермь: ПГТУ, 2000. № 1. С. 55-60.
- 2) Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости // Известия РАН, Механика твёрдого тела. - М: Наука, 2001. (в печати).
- 3) Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости и их параметрический анализ. // Тезисы докладов областной конференции молодых ученых "Молодежная наука Прикамья", Пермь, 2000. - Пермь: ПГТУ, 2000. С. 322.
- 4) Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера. // ПМТФ. - Новосибирск, 2001. Т. 42. № 4. С. 145-154.
- 5) Кулеш М.А., Шардаков И.Н. Построение и анализ некоторых точных аналитических решений двумерных упругих задач в рамках континуума Коссера. // Вестник ПГТУ. Математическое моделирование. - Пермь: ПГТУ, 2001. № 9. С. 187-201.
- 6) Кулеш М.А., Шардаков И.Н. Построение и анализ аналитических решений некоторых одномерных и двумерных задач моментной теории упругости. // Тезисы докладов VIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, Пермь, 2001. - Екатеринбург: УрО РАН, 2001. С. 380.