



III Всероссийская конференция по теории упругости

**В.В.Корепанов, М.А.Кулеш,
В.П.Матвеевко, И.Н.Шардаков**

АНАЛИТИЧЕСКИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МОМЕНТНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ УПРУГИХ ТЕЛ

Ростов-на-Дону, 2003



Цель работы

Целью работы является исследование моментных эффектов и их значимости в МДТТ

Доклад посвящен исследованию моментных эффектов деформирования упругих тел при статическом нагружении.

Структура доклада:

- Обзор публикаций, посвященных моментной теории
- Основные соотношения среды Коссера
- Аналитические решения
- Численные решения
- Результаты эксперимента
- Выводы



Учет моментных эффектов в публикациях

В.Фойхт (1887) – модель среды с вращательным взаимодействием частиц

Е.Коссера, Ф.Коссера (1909) – модель среды с моментными напряжениями

Ле Ру (1911) – градиентная модель, континуум Леру

Р.А.Тупин (1962), Р.Д.Миндлин (1962), Э.А.Аэро и Е.В.Кувшинский (1960), Ю.Н.Немиш (1965), Н.Ф.Морозов (1978), Г.Н.Савин (1979), А.И.Каландия (1973) и др. – модель псевдосреды Коссера

$\dot{\mathbf{w}} = \frac{1}{2} \text{rot } \dot{\mathbf{u}}$, \mathcal{S}, \mathcal{m} – тензоры напряжений, E, g, l, B – физ. параметры

В.Новацкий (1975), В.А.Пальмов (1964), Н.Шефер (1967) и др. – модель среды Коссера

$\dot{\mathbf{u}}$ и $\dot{\mathbf{w}}$ кинематически независимы, \mathcal{S}, \mathcal{m} – тензоры напряжений, \mathcal{g}, \mathcal{c} – тензоры деформаций, l, m, a, b, g, e – физ. параметры

Э.А.Аэро и Е.В.Кувшинский (1964), А.К.Эринген (1964), Р.Д.Миндлин (1970), А.К.Эринген (1975) и др. – прочие модели, развивающие идею моментных сред



Направления исследований

Учет моментных эффектов материала осуществляется для различных физических сред.

Модели упругих сред

Упругие волны в средах с микроструктурой

Пластические среды

Учет моментных эффектов

Модели композитных сред

«Несимметричные» жидкости

Вязкоупругие среды

Задачи, приводящие к сингулярным решениям



Идентификация параметров моментной среды

Приложения моментных моделей практически отсутствуют, так как очень мало экспериментов, в которых зафиксированы эффекты моментного поведения при деформировании упругих тел и нет достоверных данных о материальных константах.

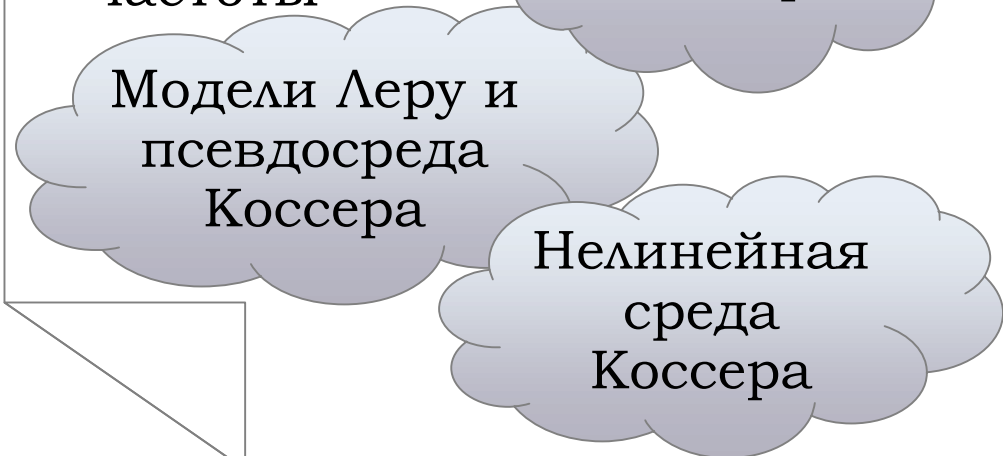
Статические эксперименты

- Изгиб, кручения
- Концентрация напряжений



Динамические эксперименты

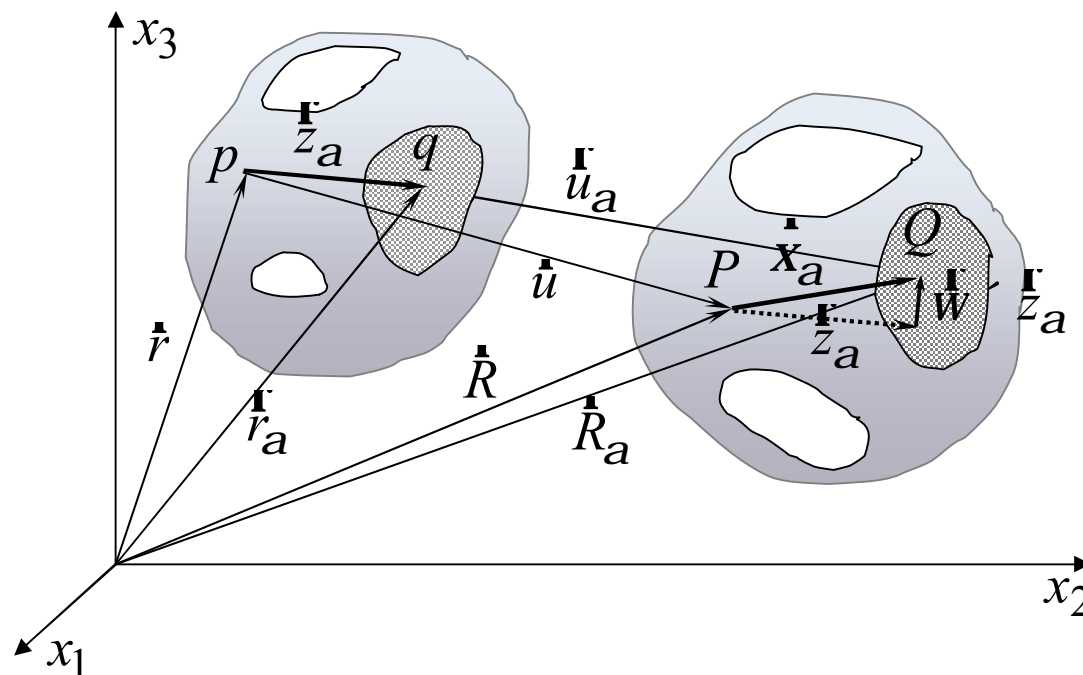
- Дисперсионные кривые
- Скорости волн
- Собственные частоты



Основные соотношения среды Коссера

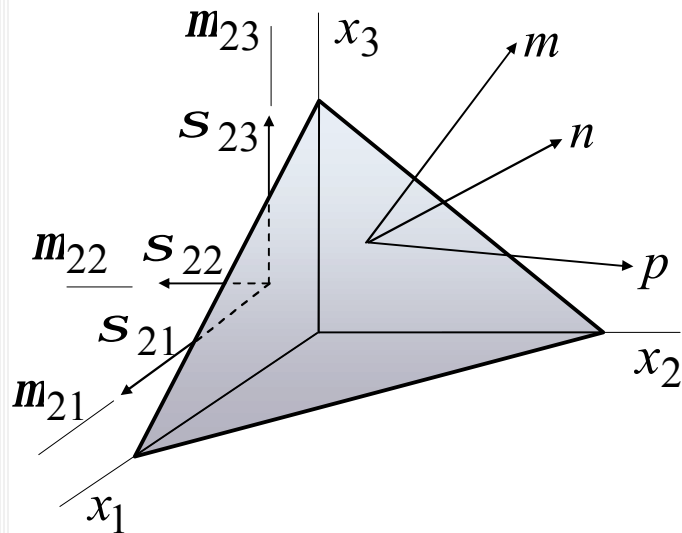
В теории среды Коссера для описания движения частиц рассматриваемой среды наряду с обычным полем перемещений вводится кинематически независимое поле векторов, характеризующих малые повороты частиц:

- вектор перемещения $\dot{\mathbf{u}} = \{u_1, u_2, u_3\}$
- вектор поворота $\dot{\mathbf{w}} = \{w_1, w_2, w_3\}$
- тензор деформаций $\dot{\mathbf{g}}^{(A)} = \frac{1}{2} \text{rot } \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{w}}, \quad \dot{\mathbf{g}}^{(S)} = \dot{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{e}}$
- тензор изгиба - кручения $\dot{\mathbf{c}}$





Основные соотношения среды Коссера



S_{ij} - тензор напряжений

m_{ij} - тензор моментных напряжений

$$\dot{p} = \dot{n} \times S, \quad \dot{m} = \dot{n} \times m$$

$i^1 j^1 S_{ij}^1 S_{ji}^1$ - несимметричность

■ Уравнения равновесия

$$\mathbf{N} \times \mathbf{S} + \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}^T : \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{N} \times \dot{\mathbf{m}} + \mathbf{Y} = \mathbf{0}$$

■ Геометрические соотношения

$$g_{ji} = u_{i,j} - E_{kji} w_k, \quad c_{ji} = w_{i,j}$$

■ Физические уравнения

$$\mathbf{S} = 2m\mathbf{g}^{(S)} + 2a\mathbf{g}^{(A)} + lI_1(\mathbf{g})\tilde{\mathbf{e}}$$

$$\mathbf{m} = 2g\mathbf{c}^{(S)} + 2e\mathbf{c}^{(A)} + bI_1(\mathbf{c})\tilde{\mathbf{e}}$$

$$\begin{aligned} (2m + l) \text{grad div } \dot{\mathbf{u}} - (m + a) \text{rot rot } \dot{\mathbf{u}} + 2a \text{rot } \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{X} &= \mathbf{0} \\ (2g + b) \text{grad div } \dot{\mathbf{w}} - (g + e) \text{rot rot } \dot{\mathbf{w}} + 2a \text{rot } \dot{\mathbf{u}} - 4a\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{Y} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Проблемный вопрос - идентификация физических параметров



$$U^{(n)}(\rho) = \frac{C_1^{(n)}}{\rho^{(n+1)}} + \frac{C_2^{(n)}}{\rho^{(n-1)}} + C_3^{(n)} \rho^{(n-1)} + C_4^{(n)} \rho^{(n+1)} + \\ + \frac{C_5^{(n)}}{\rho} I_n(2A\rho) + \frac{C_6^{(n)}}{\rho} K_n(2A\rho)$$

$$V^{(n)}(\rho) = C_1^{(n)} \rho^{\lambda(n-2)+\mu(n-4)} + C_2^{(n)} \rho^{(n-1)}$$

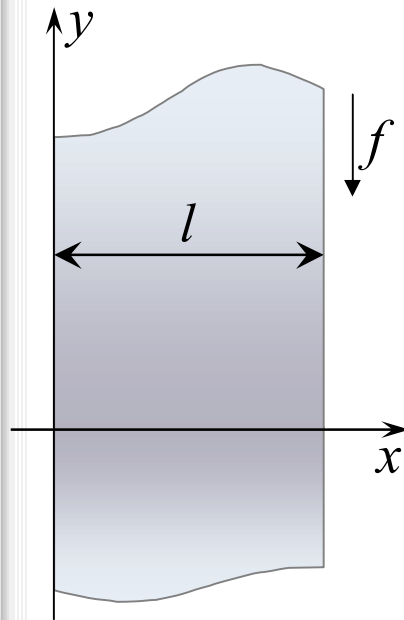
АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СТАТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

$$+ C_5^{(n)} \left(\frac{1}{\rho} I_n(2A\rho) - \frac{1}{n} I_{n-1}(2A\rho) \right) + C_6^{(n)} \left(\frac{1}{\rho} K_n(2A\rho) + \frac{1}{n} K_{n-1}(2A\rho) \right)$$

$$\omega^{(n)}(\rho) = \frac{C_2^{(n)} (\lambda + 2\mu)(2n - 2)}{\rho^n (\lambda n + \mu(n + 2))} - \frac{C_4^{(n)} (\lambda + 2\mu)(2n + 2)}{\rho^n (\lambda n + \mu(n - 2))} - \\ - C_5^{(n)} \frac{2A^2 B}{n} I_n(2A\rho) - C_6^{(n)} \frac{2A^2 B}{n} K_n(2A\rho)$$



Задача о сдвиговом деформировании слоя



R. Lakes:

$$l = 2.096 \times 10^9 \text{ н/м}^2$$

$$m = 1.033 \times 10^9 \text{ н/м}^2$$

$$a = 1.148 \times 10^8 \text{ н/м}^2$$

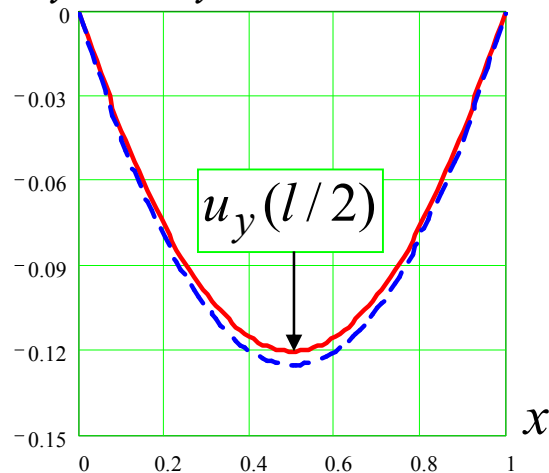
$$n = 4.1 \times 10^6 \text{ н}$$

$$e = 1.312 \times 10^5 \text{ н}$$

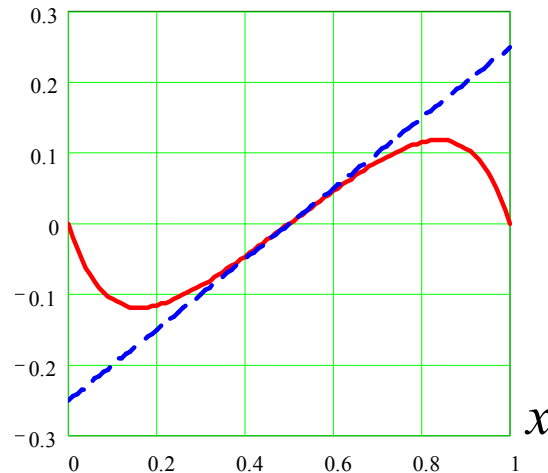
- f – массовая сила
- l – поперечный размер
- — — — — — “моментное” решение
- - - - - - “классическое” решение
- $u_y(l/2)$ – смещение в середине слоя (измеряемая величина)
- d – мера отличия моментного и классического решений

$$d = \left| \frac{u_y(l/2) - u_y^*(l/2)}{u_y^*(l/2)} \right| \times 100\%$$

$u_y(x), u_y^*(x)$



$w_z(x), w_z^*(x)$



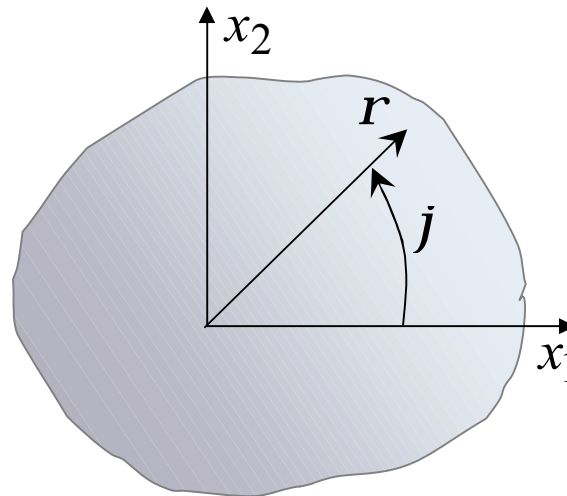
$d, \%$





Задача о деформировании тела вращения

Рассмотрим задачу построения аналитического решения для тела вращения, когда напряженно-деформированное состояние зависит только от координат r и j



$$\mathbf{u}(r, j) = \{u_r(r, j), u_j(r, j), 0\}, \quad \mathbf{w}(r, j) = \{0, 0, w_z(r, j)\}$$

$$u_r(r, j) = U^{(0)}(r) + U^{(1)}(r) \cos(j) + \sum_{n=2}^N \dot{\mathbf{a}} U^{(n)}(r) \cos(nj)$$

$$u_j(r, j) = V^{(0)}(r) + V^{(1)}(r) \sin(j) + \sum_{n=2}^N \dot{\mathbf{a}} V^{(n)}(r) \sin(nj)$$

$$w_z(r, j) = w^{(0)}(r) + w^{(1)}(r) \sin(j) + \sum_{n=2}^N \dot{\mathbf{a}} w^{(n)}(r) \sin(nj)$$



Точное аналитическое решение

Для тела вращения получено точное аналитическое решение:

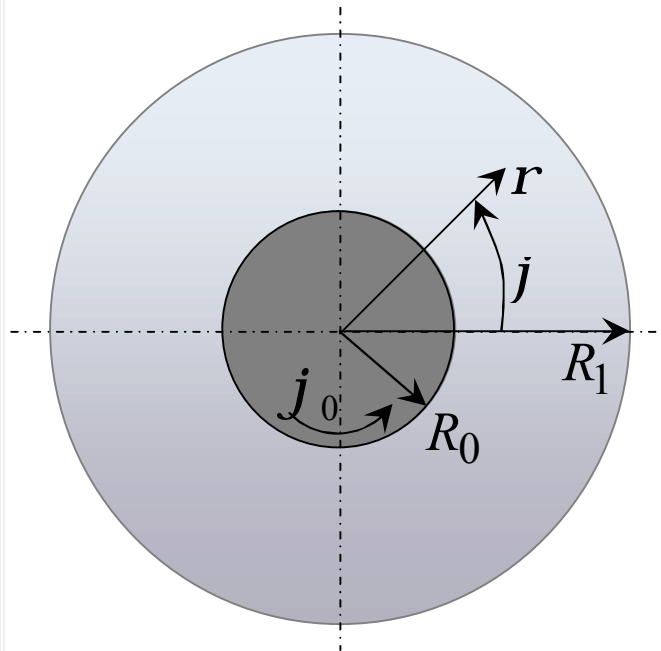
$$U^{(n)}(r) = \frac{C_1^{(n)}}{r^{(n+1)}} + \frac{C_2^{(n)}}{r^{(n-1)}} + C_3^{(n)} r^{(n-1)} + C_4^{(n)} r^{(n+1)} + \\ + \frac{C_5^{(n)}}{r} I_n(2Ar) + \frac{C_6^{(n)}}{r} K_n(2Ar)$$

$$V^{(n)}(r) = \frac{C_1^{(n)}}{r^{(n+1)}} + \frac{C_2^{(n)}}{r^{(n-1)}} \frac{l(n-2) + m(n-4)}{ln + m(n+2)} - C_3^{(n)} r^{(n-1)} - \\ - C_4^{(n)} \frac{l(n+2) + m(n+4)}{ln + m(n-2)} r^{(n+1)} + \\ + C_5^{(n)} \frac{\alpha}{\zeta} \frac{1}{e} r I_n(2Ar) - \frac{2A}{n} I_{n-1}(2Ar) \frac{\ddot{\theta}}{\theta} + C_6^{(n)} \frac{\alpha}{\zeta} \frac{1}{e} r K_n(2Ar) + \frac{2A}{n} K_{n-1}(2Ar) \frac{\ddot{\theta}}{\theta}$$

$$W^{(n)}(r) = \frac{C_2^{(n)}}{r^n} \frac{(l+2m)(2n-2)}{ln + m(n+2)} - C_4^{(n)} \frac{(l+2m)(2n+2)}{ln + m(n-2)} r^n - \\ - C_5^{(n)} \frac{2A^2 B}{n} I_n(2Ar) - C_6^{(n)} \frac{2A^2 B}{n} K_n(2Ar)$$

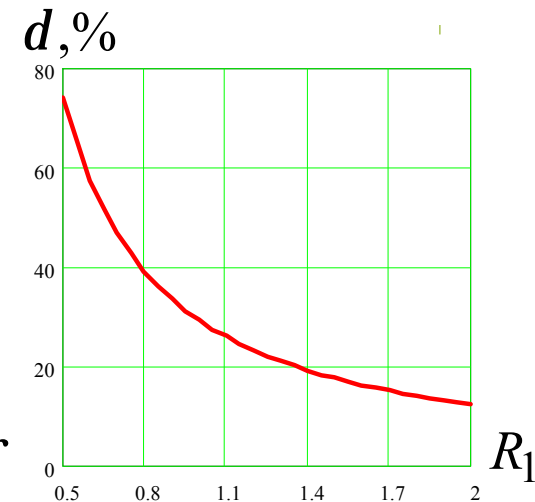
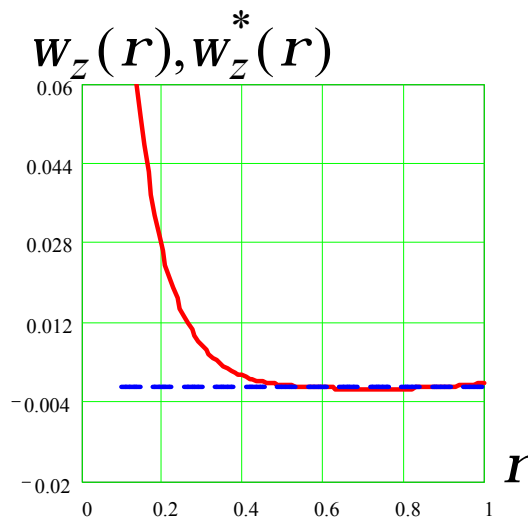
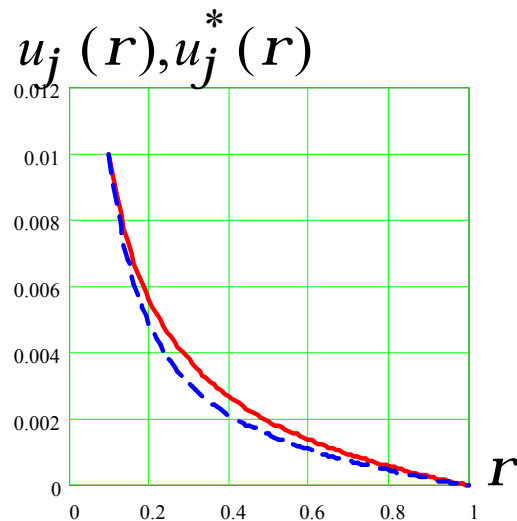


Задача о кручении кольца



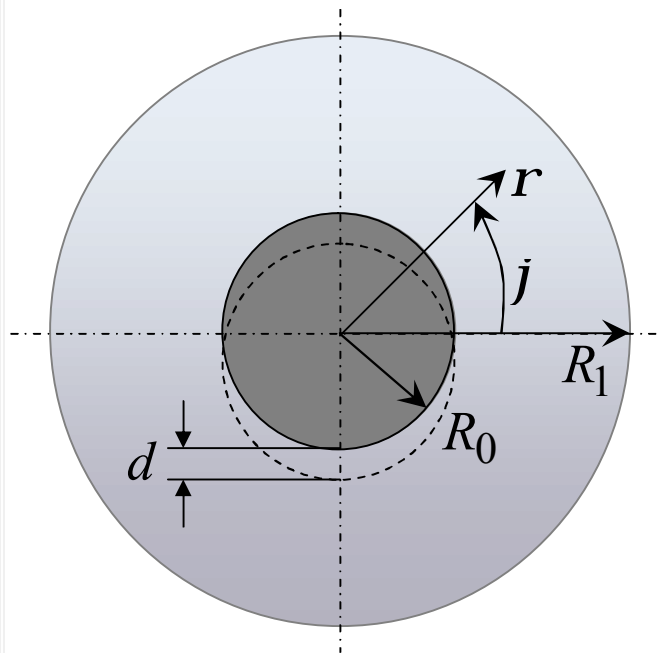
- R_0 – внутренний радиус
- R_1 – внешний радиус
- j_0 – угол поворота
- — (red solid line) – “моментное” решение
- - - - (blue dashed line) – “классическое” решение
- M – реактивный момент
- d – мера отличия моментного и классического решений

$$d = \left| \frac{M - M^*}{M^*} \right| \times 100 \%$$



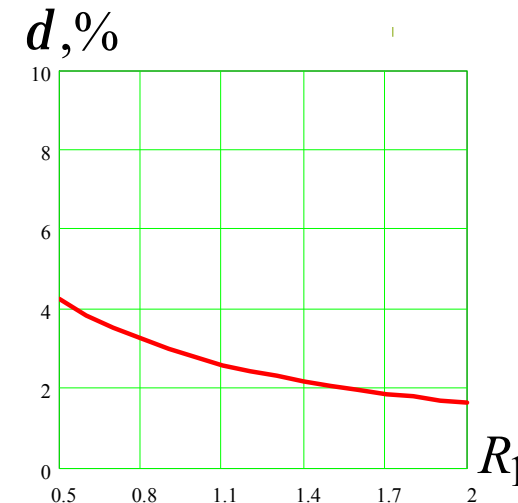
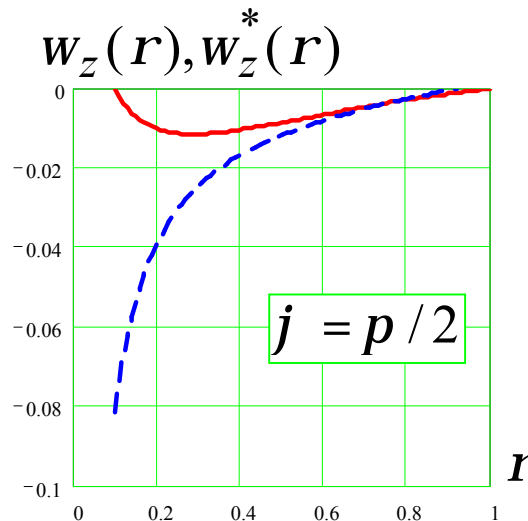
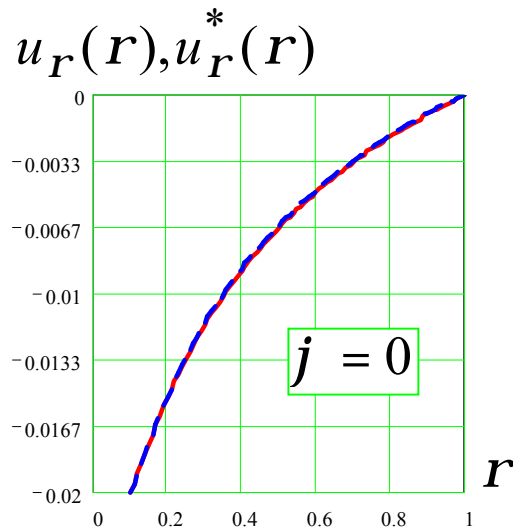


Задача о деформировании кольца



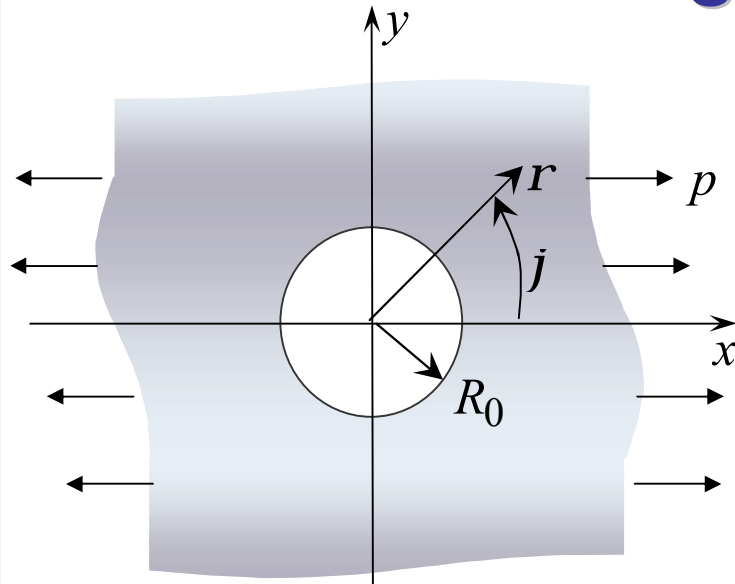
- R_0 – внутренний радиус
- R_1 – внешний радиус
- d – одноосное смещение
- ——— – “моментное” решение
- - - - - - “классическое” решение
- F – реактивная сила
- d – мера отличия моментного и классического решений

$$d = \left| \frac{F_y - F_y^*}{F_y^*} \right| \times 100 \%$$



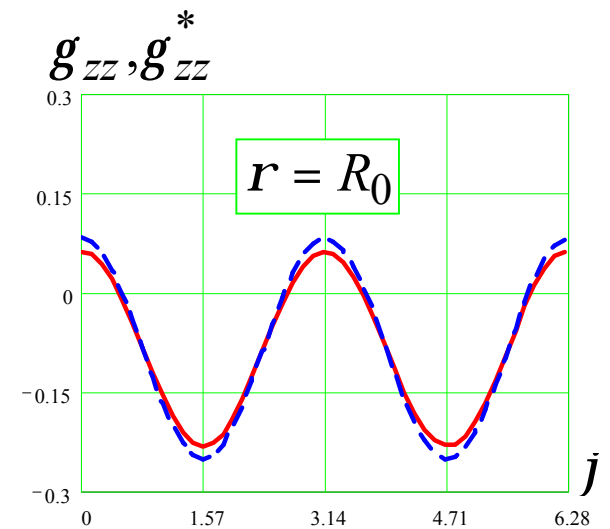
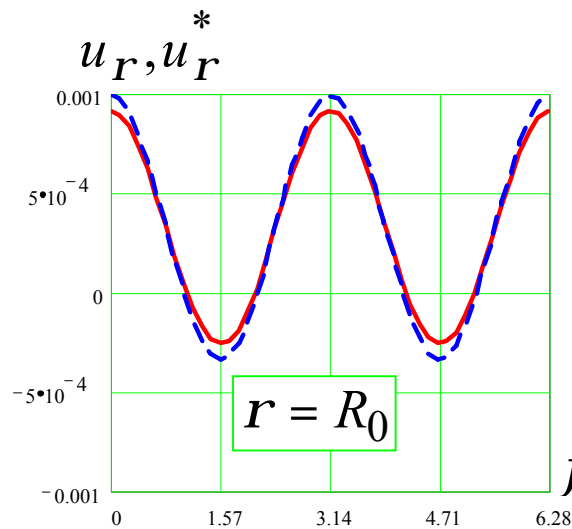
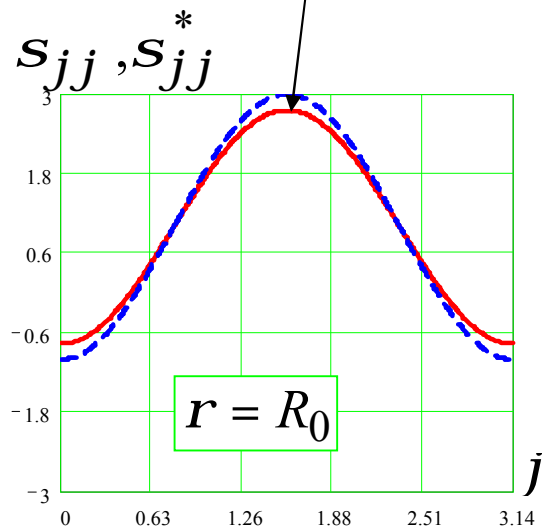


Задача Кирша



- R_0 – внутренний радиус
- p – нагрузка
- “моментное” решение
- - - “классическое” решение

коэф-т концентрации напряжений



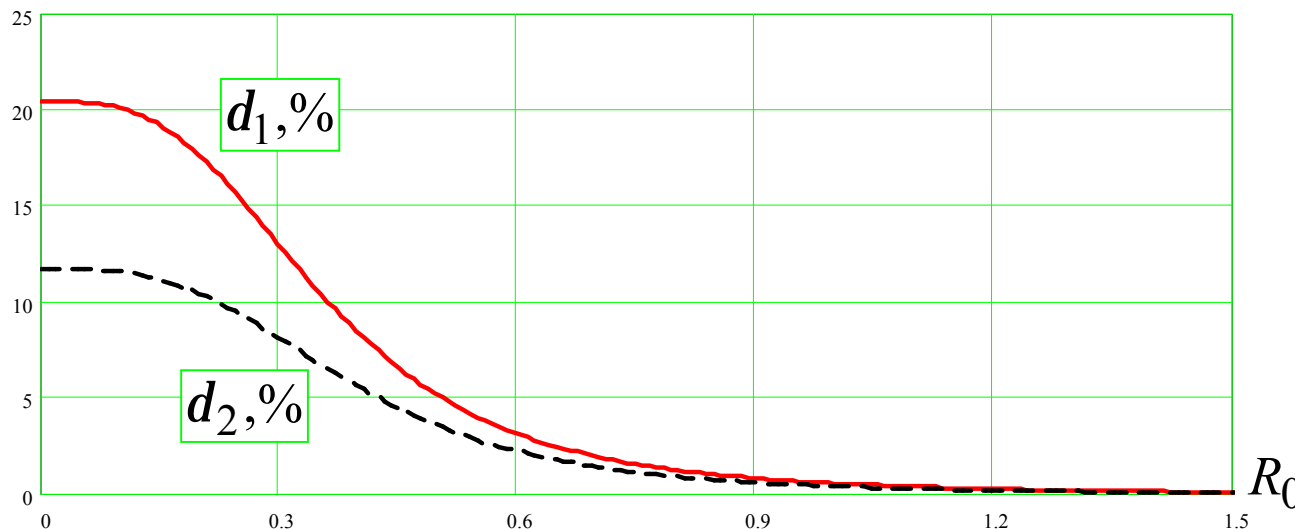


Задача Кирша

$$D_1 = \left| \frac{u_r(R_0, 0)}{u_r(R_0, p/2)} \right| \quad \text{В классической теории } D_1 \text{ всегда равна } 3$$

$$D_2 = |g_{zz}(R_0, 0) - g_{zz}(R_0, p/2)|$$

Важной особенностью является то, что эти величины для моментной теории зависят от радиуса отверстия.



$$d_1 = \left| \frac{D_1 - D_1^*}{D_1^*} \right| \times 100\%$$

$$d_2 = \left| \frac{D_2 - D_2^*}{D_2^*} \right| \times 100\%$$



ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О СТАТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Алгоритм конечно-элементной реализации

- Вариационное уравнение

$$\int_V (\mathbf{s} \times \delta \mathbf{g} + \mathbf{m} \times \delta \mathbf{c}) dV - \int_V (\dot{\mathbf{X}} \times \delta \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{Y}} \times \delta \dot{\mathbf{w}}) dV = \int_S (\mathbf{p} \times \delta \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{m} \times \delta \dot{\mathbf{w}}) dS$$

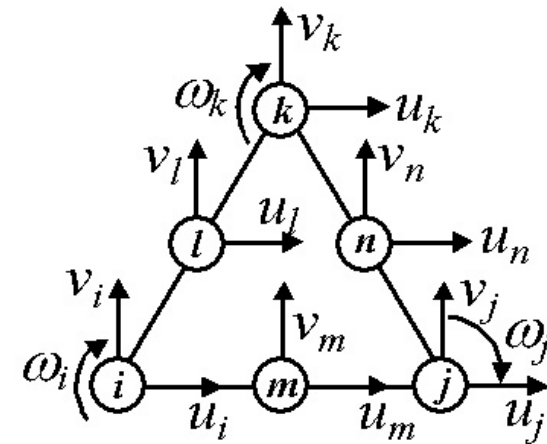
- Аппроксимация перемещений и поворотов

$$\{f\} = [N] \{\delta\}^e = [N_i, N_j, N_k, N_m, N_n, N_l] \{\delta_i, \delta_j, \delta_k, \delta_m, \delta_n, \delta_l\}^T$$

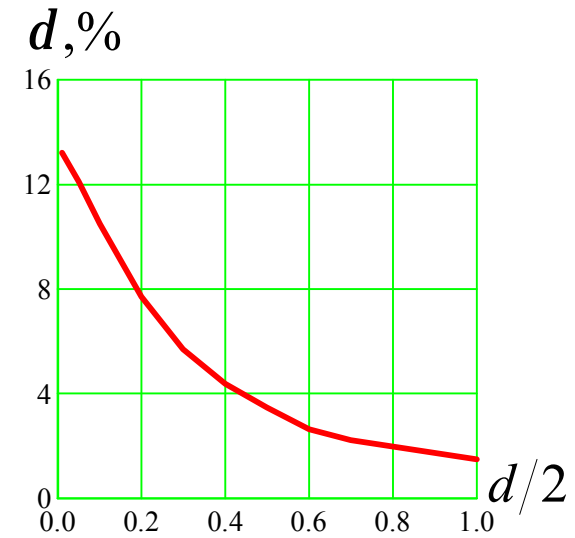
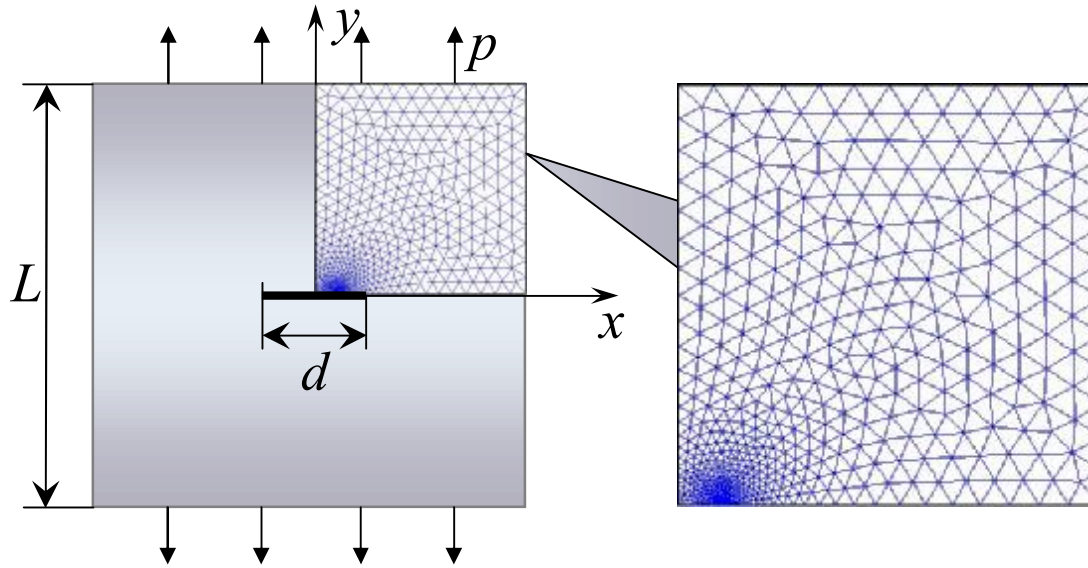
- Разрешающая система уравнений метода конечных элементов

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV \{d\} - \int_V [N]^T \{X\} dV - \int_V [N]^T \{Y\} dV = \int_S [N]^T \{p\} dS + \int_S [N]^T \{m\} dS$$

- Вариант конечного элемента



Задача о растяжении пластины с трещиной

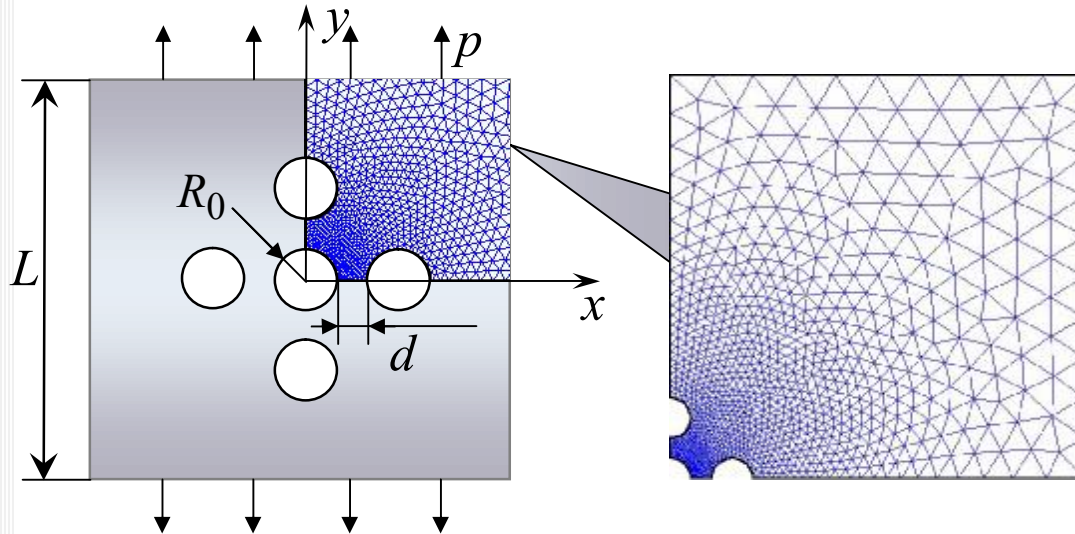


- L – размер пластины
- d – длина трещины
- мера отличия моментного и классического решений

$$d = \left| \frac{u_y(0,0) - u_y^*(0,0)}{u_y^*(0,0)} \right| \times 100\%$$

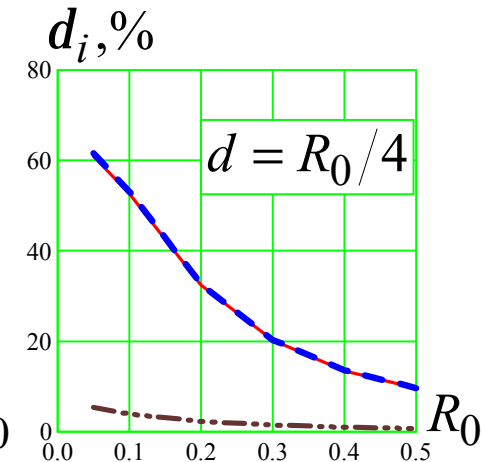
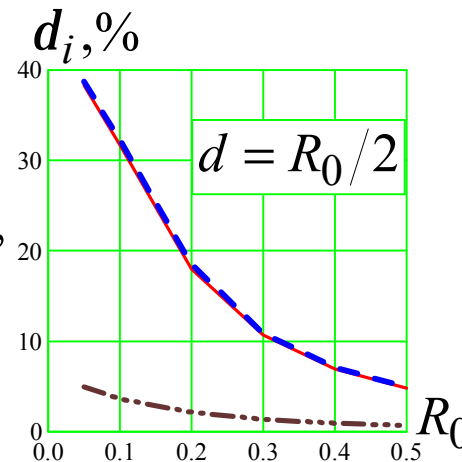
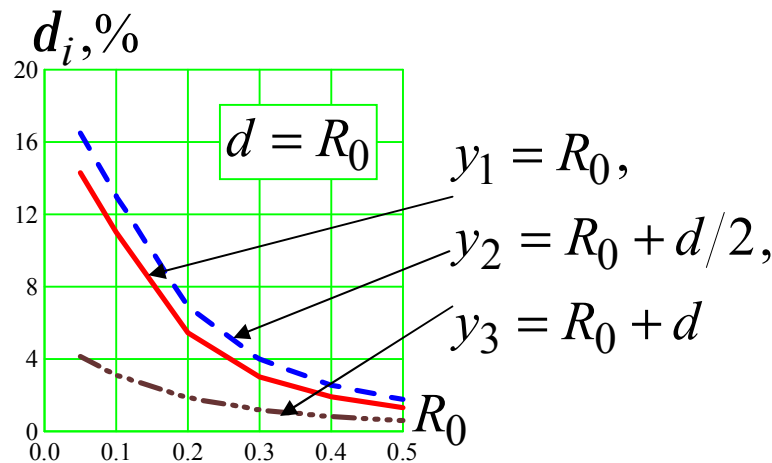


Задача о растяжении пластины с 5-ю отверстиями



- L – размер пластины
- R_0 – радиус отверстий
- d – расстояние между отверстиями
- мера отличия моментного и классического решений

$$d_i = \left| \frac{u_y(0, y_i) - u_y^*(0, y_i)}{u_y^*(0, y_i)} \right| \times 100\%$$





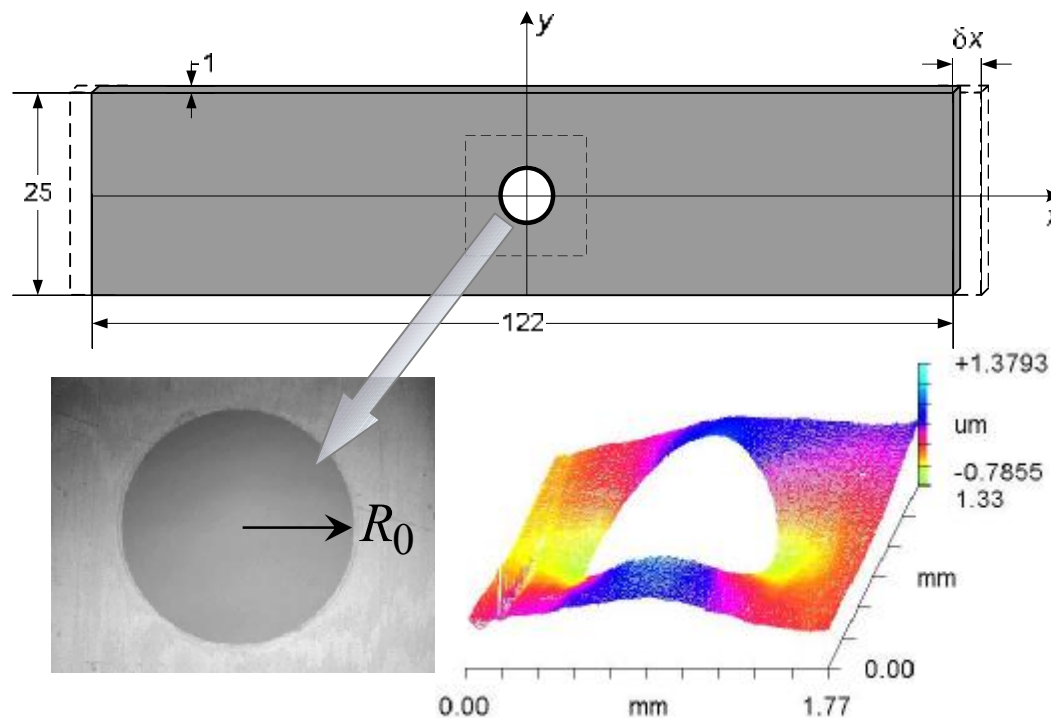
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ



Экспериментальный комплекс

Микроскоп-интерферометр New View 5000

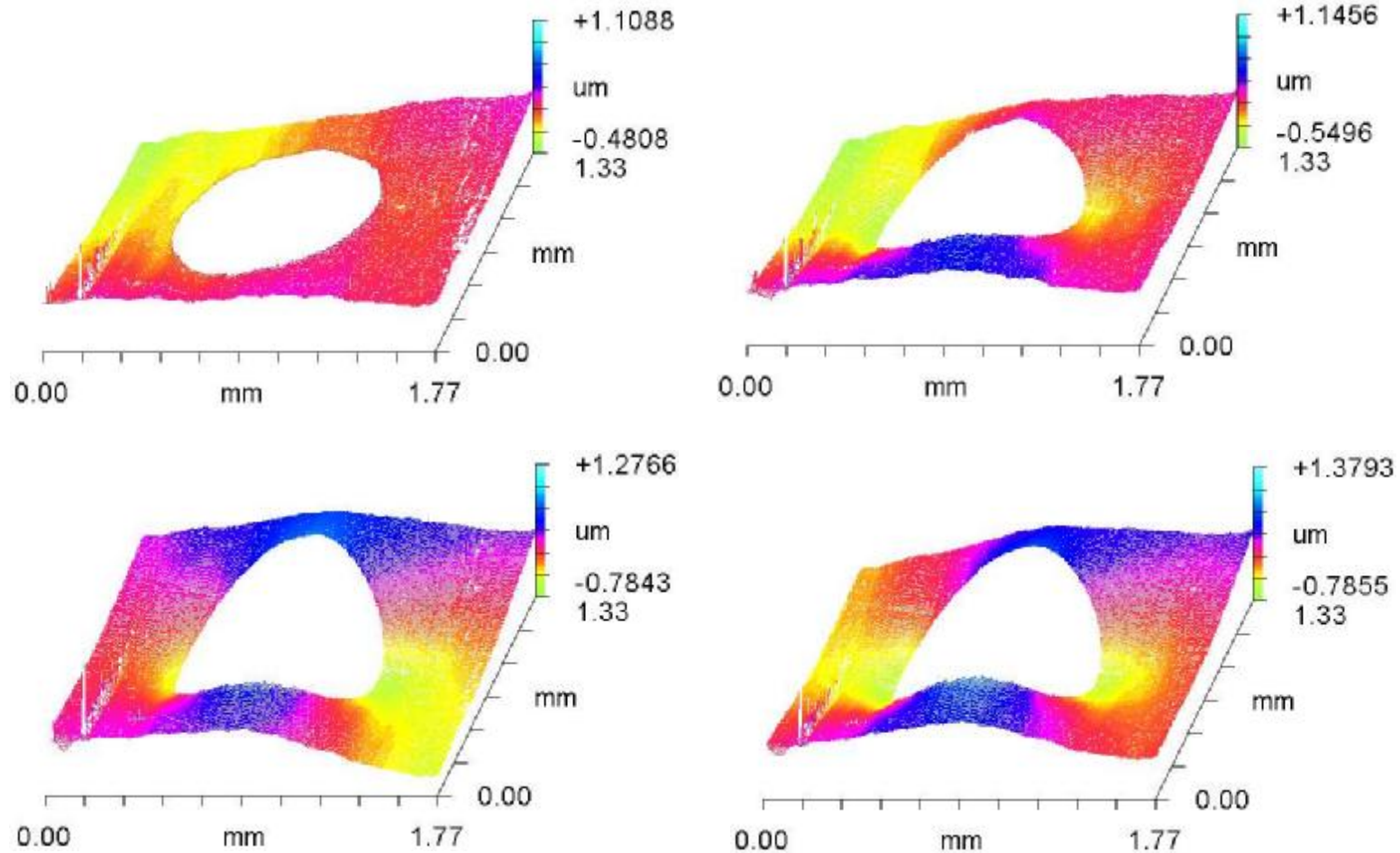
Нагружающее устройство



Объектив	Увеличение	Видимая область
10x	от 80 до 400	от 1,75x1,32 до 0,36x0,27 мм
50x	от 400 до 2000	от 360x270 до 71x53 мкм
100x	от 800 до 4000	от 180x135 до 36x27 мкм

Эксперимент для задачи Кирша

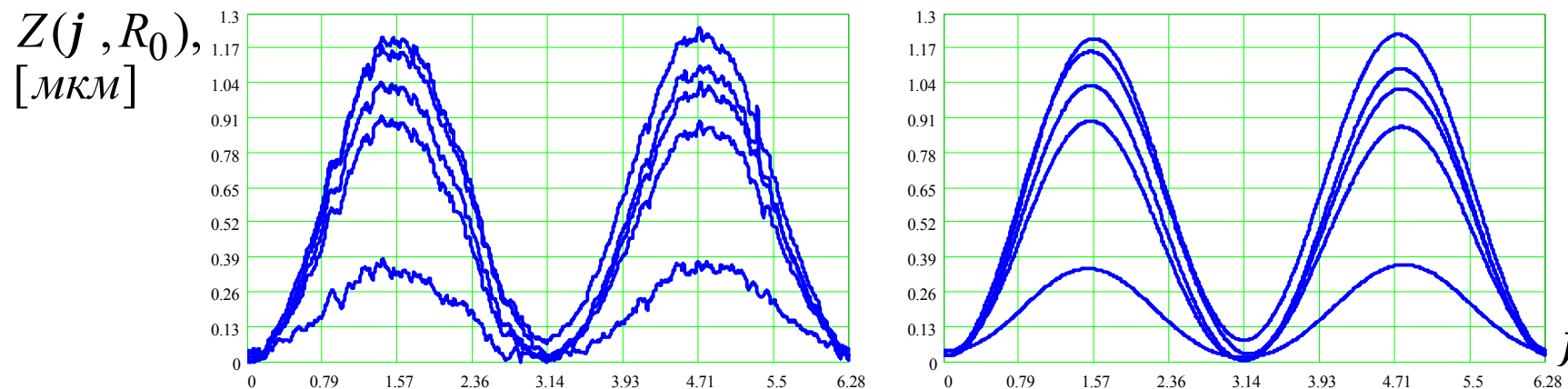
- Для различных нагрузок замерялась деформация поверхности



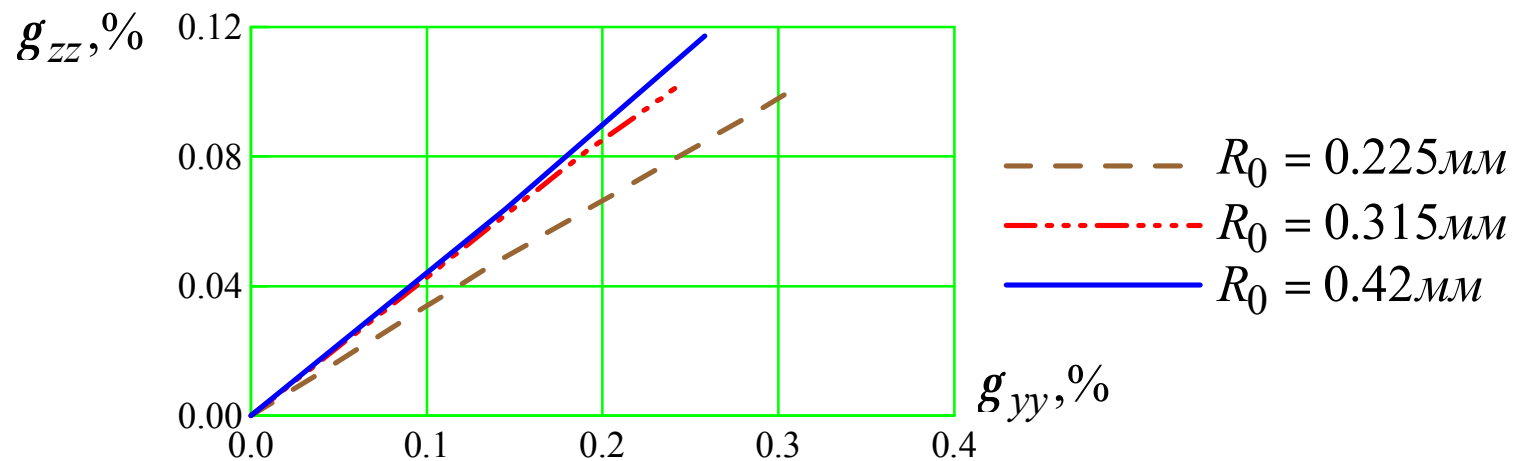


Эксперимент для задачи Кирша

- Зависимости деформации от угла сглаживались при помощи фильтра на основе прямого и обратного Фурье-преобразования



- Для различных радиусов отверстия строились зависимости деформаций от величины, характеризующей растяжение





Выводы

- Анализ аналитических и численных решений статических задач моментной теории упругости позволил установить макропараметры, которые откликаются на моментные свойства материала. Макропараметры конструктивно экспериментально измеряемы.
- Отработан экспериментальный подход на основе задачи Кирша, позволяющий регистрировать эффект моментного деформирования материала.
- Полученные экспериментальные данные позволили установить масштаб, при котором конкретный материал (оргстекло) проявляет моментные свойства. Для оргстекла этот масштаб менее **0.3** мм.



Материальные параметры

Среда Коссера характеризуется 6 материальными параметрами l, m - постоянные Ляме, a, b, n, e - постоянные среды Коссера

■ *R.D.Gauthier* $3l + 2m + a \geq 0, 2m + a \geq 0, a \geq 0,$
 $3b + 2g \geq 0, |g - e| \leq g + e, g + e \geq 0$

■ *R.Lakes*

Материал	$\rho, \frac{г}{см^3}$	$G, МПа$	ν	$l_t, мм$	$l_b, мм$	N	Ψ
Синтетический полиуретан	0.59	1033	0.335	0.063	0.032	0.316	1.5
Плотный пени- стый полиуретан	0.34	104	0.4	0.62	0.33	0.2	1.5
Твёрдая челове- ческая кость	2.0	4000	0.46	0.22	0.45	≥ 0.5	-
Пена низкой плотности	-	0.6	0.07	3.8	5.0	0.3	-

$$l = \frac{2Gn}{1 - 2n}$$

$$m = G$$

$$a = \frac{GN^2}{1 - N^2}$$

$$b = 2G(1/\Psi - 1)l_t^2$$

$$g = G \times l_t^2$$

$$e = G(2l_b^2 - l_t^2)$$

■ Приведенные безразмерные константы

$$A = l \sqrt{\frac{am}{(a+m)(g+e)}}, \quad B = \frac{a+m}{a}, \quad C = \frac{g-e}{g+e}$$