

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ «МОМЕНТНЫХ» ЭФФЕКТОВ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ УПРУГИХ ТЕЛ

Корепанов В.В. (Пермь), Кулеш М.А. (Пермь), Матвеев В.П. (Пермь),  
Шардаков И.Н. (Пермь).

*ИМСС УрО РАН*

Начиная с первых работ братьев Коссера по моментной теории упругости, и до настоящего времени практически отсутствуют надежные экспериментальные результаты, подтверждающие факт "моментного" поведения упругих материалов, а также результаты экспериментов по идентификации неизвестных параметров несимметричной теории упругости.

Для поиска эффектов "моментного" поведения материалов могут быть выбраны задачи, для которых получены аналитические решения в рамках несимметричной теории упругости [1]. Для всех этих задач выделены макровеличины, демонстрирующие эффект "моментного" поведения упругой среды, и измеряемые доступными методами.

## Результаты решения задачи Кирша, используемые для постановки эксперимента

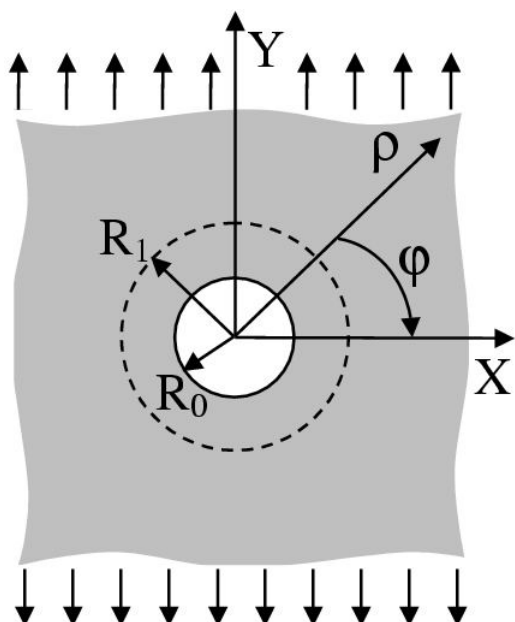


Рис.1 – Задача Кирша

В качестве основы для экспериментальных схем была выбрана задача Кирша о растяжении бесконечной пластины, ослабленной круговым отверстием (рис.1).

Анализ полученных решений на модельных материалах свидетельствует о проявлении в данной задаче эффектов "моментного" поведения материалов.

Впервые, в рамках классической теории упругости, эта задача была решена Киршем (Kirsh), позднее, несколько иным путем, Н.И.Мухелишвили [2]. Обобщение решения задачи на случай псевдосреды Коссера дано в работах [3], [4]. В.А.Пальмовым [5] была найдена концентрация напряжений вблизи кругового отверстия в рамках несимметричной теории упругости. Следует отметить, что решение, полученное

В.А.Пальмовым [5], не позволяет в полной мере проанализировать напряженно-деформированное состояние в окрестности кругового отверстия, в частности, характеризовать степень искажения отверстия при деформировании.

В работе [1] получен точный аналитический вид всех величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние в рамках этой задачи.

Из анализа решения данной задачи можно установить макропараметры, которые откликаются на "моментные" свойства материала. В качестве таких параметров можно выбрать величины, которые могут быть измерены в эксперименте доступными и достаточно надежными методами.

1. Величина  $D_1$ , характеризующая степень искажения контура кругового отверстия от действия одноосной нагрузки:

$$D_1 = \left| \frac{u_\rho(R_0, \pi/2)}{u_\rho(R_0, 0)} \right|. \quad (1)$$

В классическом случае для плоско-деформированного и плоско-напряженного состояния эта величина не зависит от материальных констант, радиуса отверстия и равна трем.

2. Величина  $D_2$ , характеризующая степень изгиба (неоднородность деформации) поверхности в окрестности отверстия:

$$D_2 = |\gamma_{zz}(R_0, 0) - \gamma_{zz}(R_0, \pi/2)|. \quad (2)$$

Для классической теории упругости эта величина также не зависит от материальных констант и радиуса отверстия.

Таким образом, целью будущих экспериментов является измерение величин  $D_1$  и  $D_2$ , позволяющих судить о наличии эффектов "моментного" поведения упругих тел.

### **Варианты экспериментов, направленных на регистрацию эффектов "моментного" поведения упругих тел**

Для подтверждения факта "моментного" поведения материалов были разработаны две схемы проведения экспериментов на основе рассмотренной выше задачи Кирша.

Первая экспериментальная схема основана на измерении контура отверстия при растяжении образца (рис.2). Конечным результатом эксперимента является экспериментальное определение величины  $D_1$ . Для измерений используется 10х (десятикратный) оптический микроскоп, оснащенный цифровой фотокамерой. Общий вид экспериментальной установки приведен на рисунке 3. Вторая схема эксперимента основана на регистрации искажения толщины образца по контуру отверстия, т.е. измерение величины  $D_2$ . Для этого использовался нагружающе-измерительный комплекс, включающий в себя растягивающее устройство и электронный микроскоп-интерферометр "New View 5000" (рис. 4).

Микроскоп "New View 5000" является уникальным измерительным прибором, позволяющим с высокой точностью и надежностью получать трехмерный образ поверхности. Максимальная вертикальная разрешающая способность микроскопа составляет 1 А ( $10^{-10}$  м). Горизонтальное

разрешение соответствует лучшим оптическим микроскопам и позволяет достигать увеличения до 4000 раз.

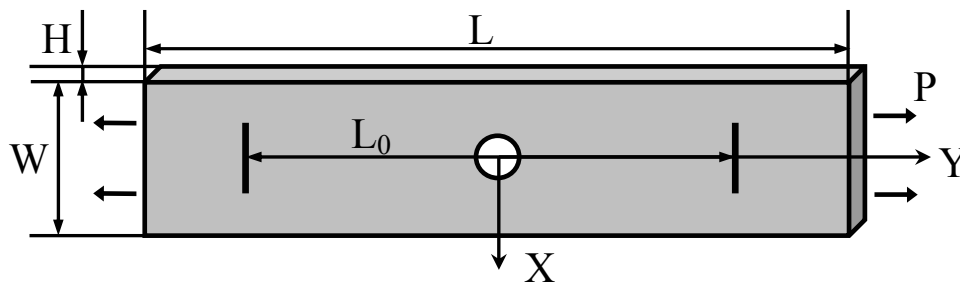


Рис.2 – Схема испытываемого образца

В эксперименте по измерению искажения контура кругового отверстия осуществлялось растяжение образца из органического стекла с диаметром отверстия 2 мм. На каждом этапе нагружения производилось фотографирование образца. Результаты измерений представлены в таблице 1.



Рис.3. – Экспериментальная установка для регистрации эллиптичности, где 1 – оптический микроскоп, 2 – образец, 3 – нагружающее устройство

Размеры испытываемого образца из органического стекла были следующими:  $L=335$  мм,  $W=50$  мм,  $H=3$  мм, начальная база деформирования –  $L_0=175$  мм (рис. 2).

Затем с использованием программного обеспечения для обработки фотографий на ПЭВМ измерялось искажение отверстия. Измерение отверстия производилось в условных единицах фоторедактора.

Таблица 1. – Определение степени искажения контура кругового отверстия, где  $X_1$  – начальная база деформирования в поперечном направлении;  $Y_1$  – начальная база деформирования в продольном направлении

№	Этап нагружения	Продольная деформация на базе $L_0$ (%)	Y (усл. ед.)	X (усл. ед.)	Y-Y1	X-X1	D1
1	Начальный отсчет	0.00	50.3	50.1	0.0	0.0	–
2	Нагружение	0.66	50.8	50.0	0.5	-0.1	5
3	Нагружение	0.91	50.9	50.0	0.6	-0.1	6
4	Нагружение	1.39	51.1	49.9	0.8	-0.2	4
5	Полная разгрузка	0.00	50.4	50.1	0.1	0.0	–



Рис.4 – Экспериментальный комплекс: нагружающее устройство (2) и микроскоп-интерферометр "New View 5000" (1)

Из таблицы 1 хорошо видно увеличение диаметра отверстия в продольном направлении и уменьшение в поперечном. Результаты эксперимента показали, что величина  $D_1$  отличается от классического значения, равного трем. Вместе с тем, полученный результат следует считать предварительным. Для того, чтобы утверждать, что отличие  $D_1$  от трех есть проявление "моментного" поведения материала необходимо:

- увязать влияние на конечный результат эксперимента (величину  $D_1$ ) отклонения реального контура отверстия от идеальной окружности;
- оценить влияние на конечный результат эксперимента отклонения реального напряженно-деформированного состояния от плоско-напряженного состояния;
- набрать необходимые статистические данные на образцах из различных материалов с упругим поведением при реализуемых условиях деформирования.

В экспериментах по измерению неоднородности деформации поверхности в окрестности отверстия сканировался профиль поверхности для различных уровней деформированного состояния и фиксировалось изменение высоты  $z(\varphi)$  на различных окружностях  $\rho > R_0$ . Испытываемые образцы из органического стекла имели следующие размеры:  $L=120$  мм,  $W=45$  мм,  $H=1$  мм, начальная база деформирования –  $L_0=50$  мм (рис. 2). Экспериментальные кривые высот для различных уровней деформации образца приведены на рис. 5.а. Для полученных экспериментальных зависимостей  $z(\varphi)$  осуществлялось сглаживание (фильтрация) с использованием прямого и обратного Фурье-преобразований:

$$u_{\rho}^{(f)}(\varphi) = F_{inv} \circ M \circ F \circ u_{\rho}(\varphi), \quad (3)$$

где  $u_{\rho}^{(f)}(\varphi)$  – экспериментально зафиксированная зависимость,  $u_{\rho}(\varphi)$  – сглаженная зависимость,  $F$  – оператор прямого непрерывного Фурье-преобразования,  $F_{inv}$  – оператор обратного Фурье-преобразования,  $M$  – оператор фильтрации Фурье-спектра.

Сглаженные зависимости  $z^f(\varphi)$  приведены на рисунке 5.б.

Экспериментальные картины о профиле поверхности для различных состояний нагружения образца представлены на рис. 6.

В рамках гипотезы о плоско-напряженном состоянии по экспериментальным данным об изменении профиля поверхности можно определить значение деформации  $\gamma_{zz}$  и вычислить величину  $D_2$  при различных значениях макродеформации на захватах  $\gamma_{yy}$ :

$$D_2(\gamma_{yy}) = \left( \frac{R_1}{R_0} \right)^2 \left| \frac{\delta z_f^{(i)}(0) - \delta z_f^{(i)}(\pi/2)}{b} \right|, \quad (4)$$

где  $b$  – полутолщина образца,  $R_0$  – радиус отверстия,  $R_1$  – радиус измерительного контура,  $\delta z_f^{(i)}(0)$  – осредненная величина изменения высоты для угла  $\varphi = 0$ ,  $\delta z_f^{(i)}(\pi/2)$  – осредненная величина изменения высоты для угла  $\varphi = \pi/2$ .

Для анализа предлагается использовать полученную экспериментальную зависимость  $D_2$  от значения  $\gamma_{yy}$ . На рис. 7 данная зависимость приведена для различных значений радиуса отверстия. Анализ теоретических результатов показывает, что для классической теории упругости отсутствует зависимость  $D_2$  от радиуса отверстия, а в моментной теории упругости зависимость от радиуса имеет место.

В эксперименте получен веер прямых. Однако прежде чем утверждать, что этот результат количественно подтверждает наличие "моментного" эффекта необходимо оценить реализуется ли в эксперименте плоско-напряженное состояние. Для рассматриваемых образцов на основе метода конечных элементов были выполнены расчеты в трехмерной постановке в рамках классической теории упругости.

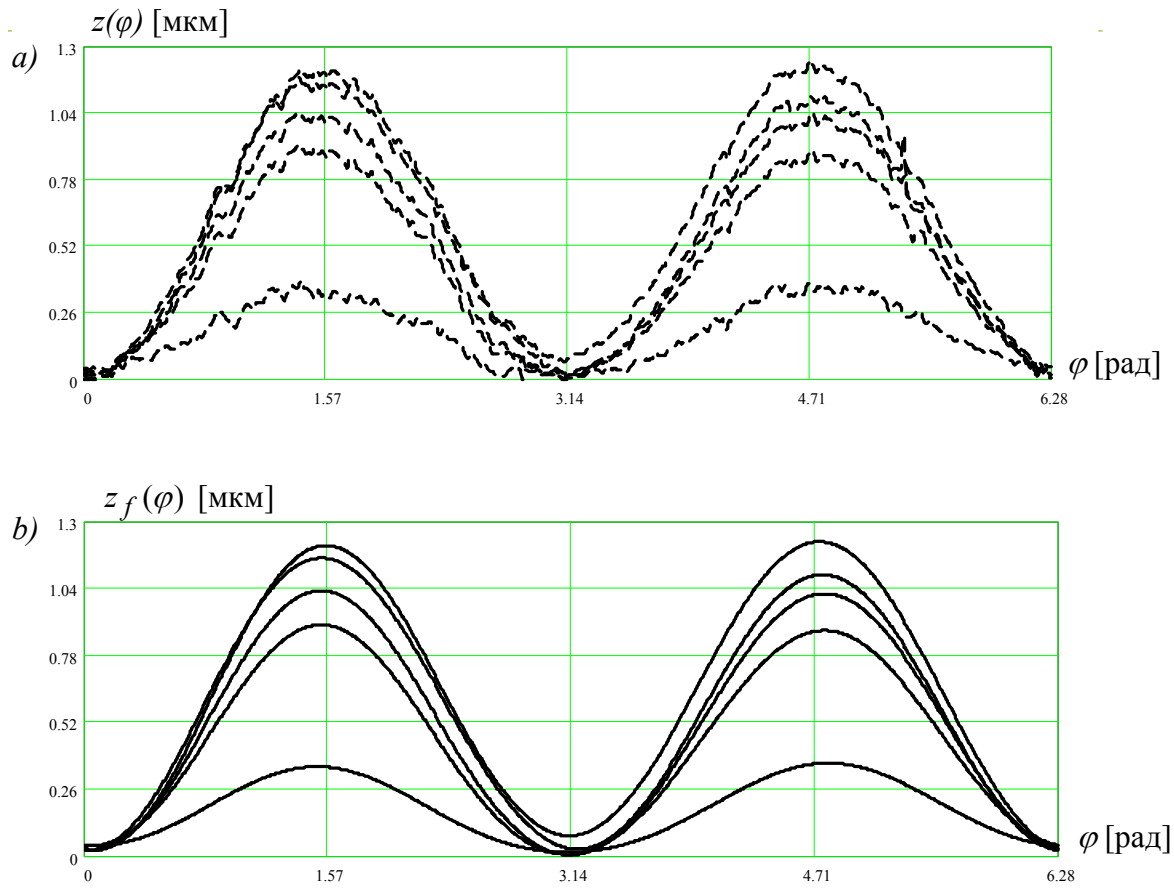


Рис.5 – Зависимость высоты поверхности от угла в окрестности отверстия (a); усреднение этой зависимости с использованием прямого и обратного Фурье преобразований (b)

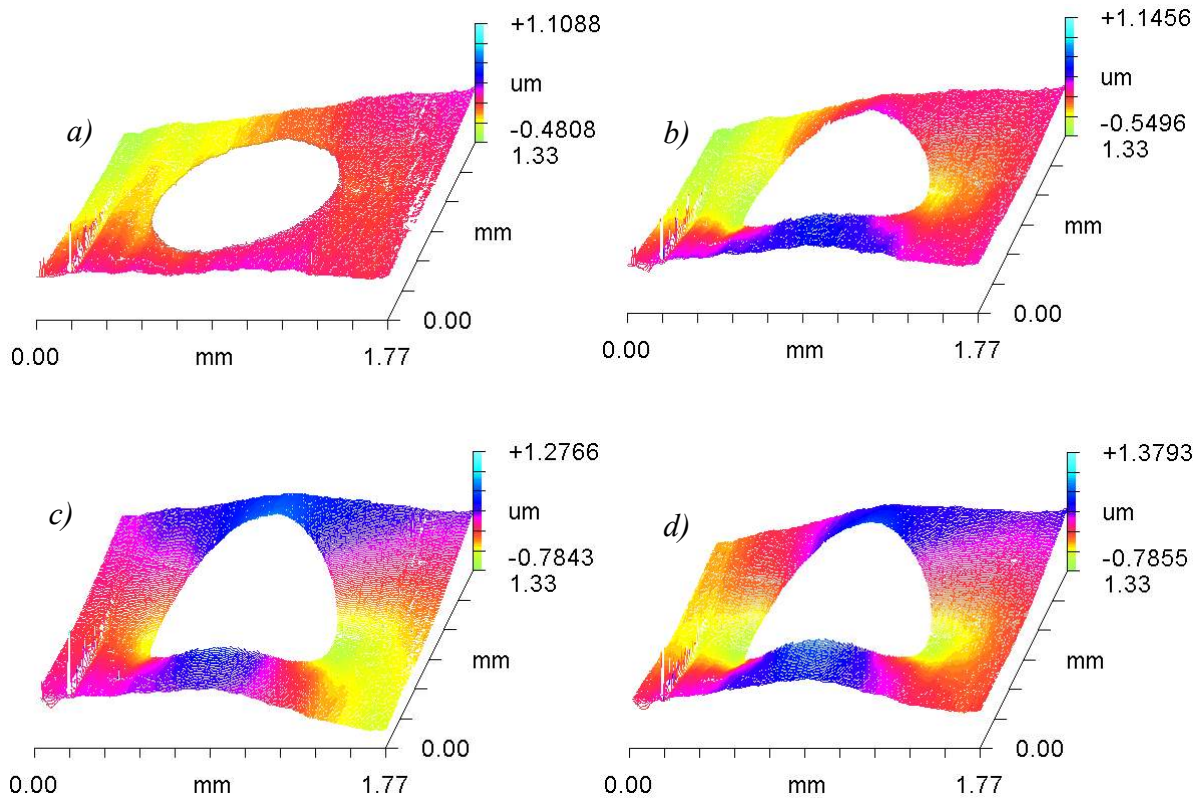


Рис.6 – Поверхность пластины в окрестности отверстия; недеформированное состояние (a);  $\gamma_{yy} = 0.1\%$  (b);  $\gamma_{yy} = 0.26\%$  (c);  $\gamma_{yy} = 0.3\%$  (d)

Для решения задачи в трехмерной постановке использовался конечно-элементный пакет ANSYS. Для конечно-элементного расчета бралась 1/8 часть пластины с заданием условий симметрии:

$$\begin{aligned} X=0: & \quad u_x = 0; \\ Y=0: & \quad u_y = 0; \\ Z=0: & \quad u_x = u_y = u_z = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

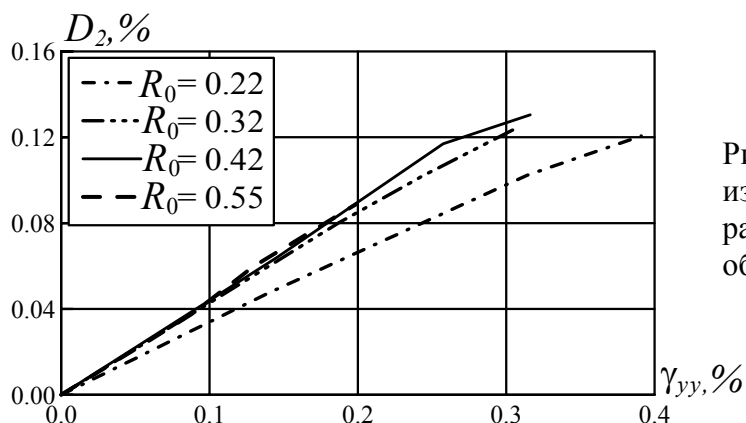


Рис.7 – Зависимость экспериментально измеряемого макропараметра  $D_2$  от различных уровней деформирования образца

В качестве конечного элемента использовался десятиузловой тетрагональный элемент.

Дискретизация расчетной области представлена на рис. 8.

Все геометрические размеры пластины и материальные константы материала (коэффициент Пуассона  $\nu$  и модуль упругости  $E$ ) задавались такими же, как в эксперименте: ширина пластины  $W=45$  мм; длина –  $L=120$  мм; толщина –  $H=1$  мм. Для рассматриваемого в эксперименте материала (органическое стекло) коэффициент Пуассона  $\nu=0.33$ ; модуль упругости  $E=4.44 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>.

Граничные условия на внешних гранях пластины задавались в перемещениях:

$$u_y|_{X=\pm L/2} = u^* \tag{6}$$

Величина  $u^*$  подбиралась таким образом, чтобы обеспечить заданный уровень продольной деформации, соответствующий экспериментальному значению.

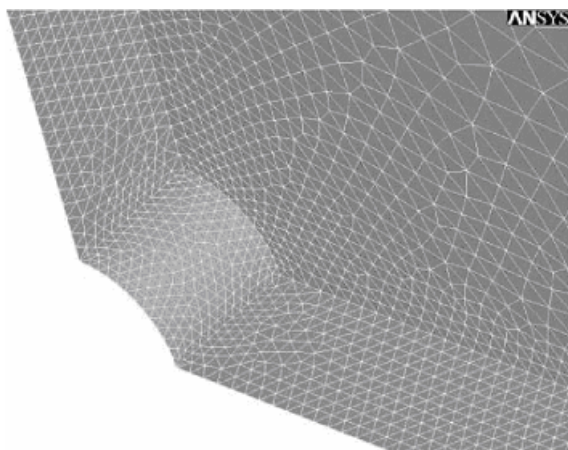


Рис.8 – Схема дискретизации расчетной области в окрестности отверстия для трехмерной задачи о растяжении пластины с отверстием, число конечных элементов  $N=33452$ .

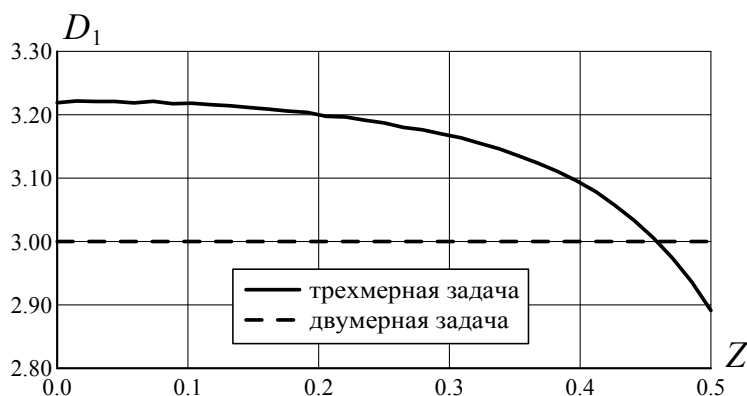


Рис.9 – Зависимость  $D_1$  от изменения толщины пластины  $Z$  для  $R_0=0.28$  мм.

На рисунке 9 представлены значения  $D_1$ , полученные в рамках классической теории упругости в двумерной и трехмерной постановках для одного из размеров отверстия.

Результаты расчетов показывают, что для данного радиуса отверстия и материала образца свидетельством наличия эффектов "моментного" поведения материала будет регистрация в пределах погрешности эксперимента величины  $D_1$  на поверхности образца меньше 2.9 или больше 3.

Результаты расчетов величины  $D_2$  в рамках классической теории упругости позволяют сделать следующее заключение.

При указанном размере отверстия судить о наличии "моментных" эффектов по величине  $D_2$  на контуре отверстия можно только на основе количественного сравнения результатов эксперимента и решения трехмерной задачи классической теории упругости.

Результаты расчетов, приведенные на рис. 10, позволяют сделать вывод о том, что решение в трехмерной постановке совпадает с решением двумерной задачи (плоско-напряженное состояние) с приемлемой для эксперимента точностью при отношении радиуса отверстия к толщине пластины больше двух.

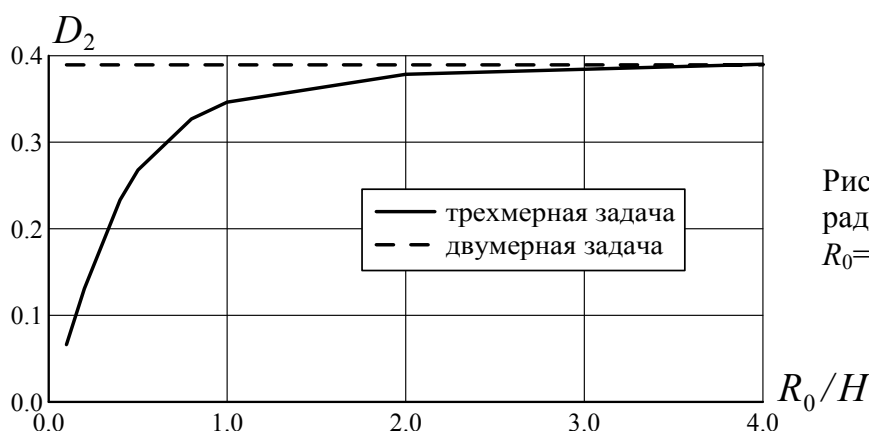


Рис.10 – Зависимость  $D_2$  от радиуса отверстия  $R_0$  для  $R_0=0.28$  мм.

В выполненной серии экспериментов не удалось выдержать это соотношение. Вместе с тем экспериментальные данные (рис. 12) не совпадают с решением трехмерной задачи классической

теории упругости. Поэтому можно сделать предварительный вывод, что эксперимент выявил количественное отличие от решения, полученного в рамках классической теории упругости.

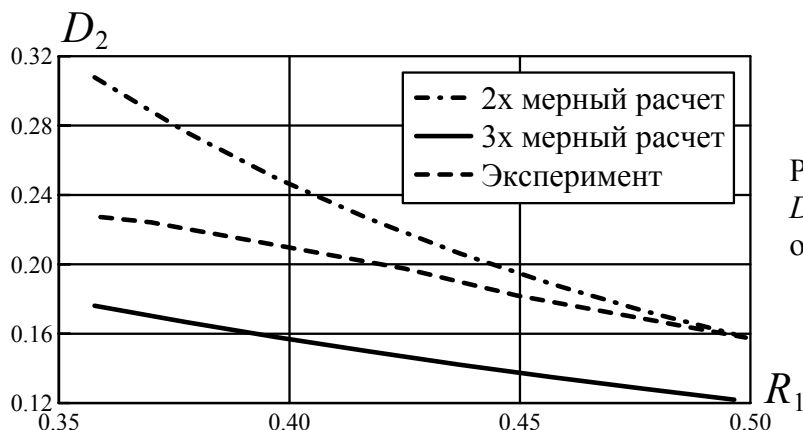


Рис.12 – Зависимость изменения  $D_2$  от радиуса окрестности отверстия  $R_1$  для  $R_0=0.32$  мм.

### Заключение

Предложены и отработаны схемы экспериментов по регистрации фактов "моментного" поведения упругих материалов, и получены предварительные экспериментальные результаты.

Выполнен анализ экспериментальных данных и приведены численные расчеты, определяющие программу экспериментальных работ по установлению фактов "моментного" поведения упругих материалов.

### Литература

1. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Parametric analysis of analytical solutions to one- and two-dimensional problems in couple-stress theory of elasticity // Z. Angew. Math. Mech. 2003. V. 83. № 4. P. 238-248.
2. Н.И.Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 707с.
3. Gauthier R.D., Jahsman W.E. A quest for micropolar elastic constants. Part 2. // Arch. Mech. 1981, V.33. No.5. P.717-737.
4. Динамика и устойчивость слоистых композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1992.
5. Пальмов В.А. Плоская задача теории несимметричной упругости // Прикладная математика и механика. 1964. Т.28. Вып.6. С.1117-1120.