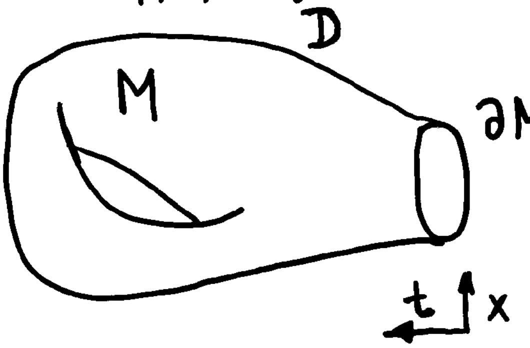
Гомотопическая классификация и индекс краевых задач для общих эллиптических операторов

Б. Стернин, А. Савин

I. Классические краевые задачи

D - эллиптич. оператор дифференциальн. $\dim\ker D = \infty$



$$\begin{cases} Du = f, & f \in C^\infty(M,F) \\ Bj^{m-1}u = g, & g \in C^\infty(\partial M, G) \end{cases}$$

$u \in C^\infty(M,E)$, $\operatorname{ord} D = m$,

$$j^{m-1}u = \left(u|_{\partial M}, \dots, \left(-i\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1} u|_{\partial M}\right)$$

Эллиптичность

$L_+(D) \subset \pi^* E^m$, $\pi : S^*(\partial M) \to \partial M$

- подпространство данных Коши ограниченных при $t \to +\infty$ решений

$$\sigma(D)\left(x, 0, \xi', -i\frac{d}{dt}\right)u(t) = 0$$

Def $\begin{pmatrix} D \\ B \end{pmatrix} : H^s(M,E) \to \begin{matrix} H^{s-m}(M,F) \\ \oplus \\ H^{\delta}(\partial M, G) \end{matrix}$ - эллиптическая задача $\iff$ условие Шапиро-Лопатинского $L_+(D) \xrightarrow{\sigma(B)} \pi^* G$ - изоморфизм на $S^*(\partial M)$

Th (D,B) - эллиптическая задача $\Rightarrow$ (D,B) - фредгольмова

$s > m - \frac{1}{2}$

Препятствие Атьи-Ботта

Условия эквивалентны:

1. D стабильно допускает эллипт. краевую задачу;
2. $[L_+(D)] \in \pi^* K(\partial M)$, $\pi: S^*(\partial M) \to \partial M$;
3. $\sigma(D)(x,0,\xi',\tau) \sim \sigma'(x)$ на ∂M;
4. $j^*[\sigma(D)] = 0 \in K^1(T^*(\partial M))$, $j: T^*M\big|_{\partial M} \hookrightarrow T^*M$.

Вопрос: можно ли упростить по п.3 краевую задачу?

<u>класс операторов</u>

непрерывные символы

$$D = \sum_{k=0}^{m} D_k(t)\left(-i\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-k}$$

$D_k(t)$ – псевдодифференциальный, $\operatorname{ord} D_k(t) = k$

$D_0(t)$ – гомоморфизм расслоений

<u>$\operatorname{ord} D = 0$</u> $\Rightarrow D\big|_{U_{\partial M}} = D_0(t)$, $[\sigma(D)] \in K_c(T^*(M \setminus \partial M))$

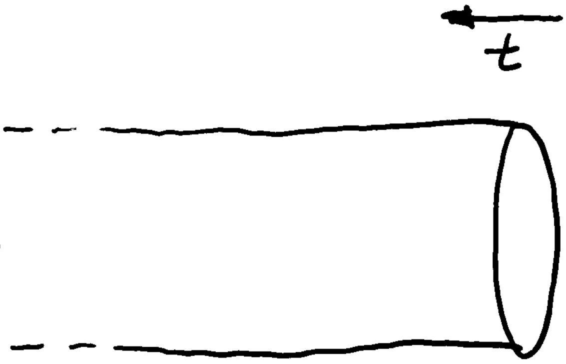
$$Ell^0(M) = \left\{ \begin{array}{l} \text{классы стабильно гомотопных} \\ \text{операторов } D,\ \operatorname{ord} D = 0 \end{array} \right\}$$

<u>Th</u> (о гомотопической классификации)

$$Ell^0(M) \xrightarrow{\chi} K_c(T^*(M \setminus \partial M)) \text{ – изоморфизм}$$

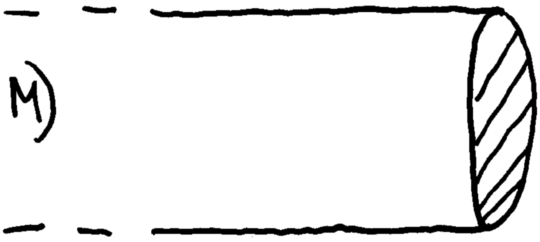
$$D \mapsto [\sigma(D)]$$

$T^*M =$



$\sigma(D)$ обратим на S^*M

$T^*(M \setminus \partial M)$



$\operatorname{ord} D = 0;$
$\sigma(D)$ обратим на $\partial B^*M = S^*M \cup B^*M|_{\partial M}$

$\mathrm{ord}\, D = m > 0$

Операторы редукции порядка

$$E\big|_{U_{\partial M}} = E_+ \oplus E_- \quad \Bigg| \quad \begin{array}{ll} \Lambda_\pm : C^\infty(\partial M, E_\pm) \circlearrowleft, & \sigma(\Lambda_\pm) = |\xi'| \cdot 1_{E_\pm} \\ \Lambda : C^\infty(M, E) \circlearrowleft & \sigma(\Lambda) = |\xi| \cdot 1_E \end{array}$$

χ - срезающая функция

$$D_\pm = \chi(t)\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial t} + i\Lambda_+\right) \oplus \left(+i\frac{\partial}{\partial t} + i\Lambda_-\right)\right] + (1-\chi(t))\, i\Lambda .$$

$$\boxed{\begin{cases} D_\pm u = f, & u = (u_+, u_-) \\ u_-\big|_{\partial M} = g, & g \in C^\infty(\partial M, E_-|_{\partial M}) \end{cases}} \quad (*)$$

эллиптический и обратимый

оператор D_+: $\begin{array}{l} E_+ = E \\ E_- = 0 \end{array} \Bigg\| \Rightarrow D_+ = \chi(t)\left(-i\frac{\partial}{\partial t} + i\Lambda_+\right) + (1-\chi(t))\, i\Lambda$

$$\mathrm{Ell}^m(M) = \left\{\begin{array}{l} \text{классы стабильно гомотопных задач} \\ (D, B),\ \mathrm{ord}\, D = m,\ \text{по модулю } (*) \circ D_+^{m-1} \end{array}\right\}$$

Th $\boxed{\times D_+^m : \mathrm{Ell}^0(M) \to \mathrm{Ell}^m(M) \quad \text{- изоморфизм.}}$ об обратном

Следствие 1 $\chi \circ (\times D_+^m)^{-1} : \mathrm{Ell}^m(M) \to K_c(T^*(M \setminus \partial M))$ - изоморфизм

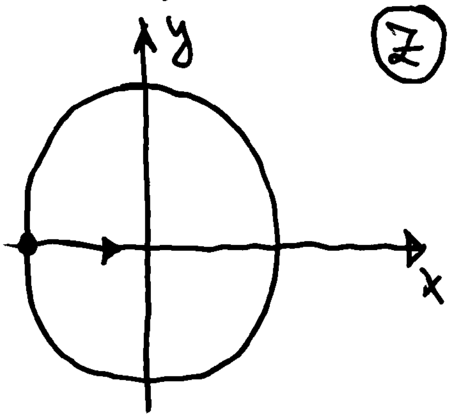
Следствие 2 (формула индекса)

$$\mathrm{ind}\, \mathcal{D} = p_! \circ \chi \circ (\times D_+^m)^{-1} [\mathcal{D}]$$

$$p : M \setminus \partial M \to pt, \quad p_! : K_c(T^*(M \setminus \partial M)) \to K(pt) = \mathbb{Z}$$

Пример: (оператор Коши-Римана)

$$D = \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}, \qquad z = x+iy$$



$$\sigma(D)(\xi,\eta) = -i\xi - \eta \neq 0 \text{ вне } \{\xi=\eta=0\}$$

$\boxed{z=-1} \Rightarrow \sigma(D)\left(-i\frac{d}{dx},\eta\right) = \frac{d}{dx} - \eta$

$$\boxed{L_+(D)(-1,\eta) = \begin{cases} 0, & \eta>0 \\ \mathbb{C}, & \eta<0 \end{cases}}$$ на $S^*S^1 = S^1_+ \cup S^1_-$

$L_+(D) \notin \pi^* \mathrm{Vect}(S^1)$, $\pi : S^*S^1 \to S^1$

Условие Атьи-Ботта нарушено.

$$\begin{cases} Du = f \\ Bj^*u = g, \; g \in \mathcal{L} \text{ - баханово} \end{cases}$$

В.: Когда краевая задача корректна?

$$\ker(D,B) \simeq \ker D \cap \ker Bj^* \simeq j^*\ker D \cap \ker B$$

$$\operatorname{coker}(D,B) \simeq \operatorname{coker} Bj^*\big|_{\ker D} \simeq \operatorname{coker} B\big|_{j^*\ker D}$$

$$\ker D = \left\{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k, \; c_k \in \mathbb{C}\right\}$$

$(D,B,\mathcal{L})$ - корректна $\Leftrightarrow B : j^*\ker D \to \mathcal{L}$ фредгольмов

$\underset{\mathrm{Im}\,P}{\overset{\shortparallel}{j^*\ker D}} \subset H^{s-1/2}(S^1)$ Пространство Харди определяется ψD проектором

(О.: $\mathcal{L} = \mathrm{Im}\,P$, $B = 1$)

II. Краевые задачи для общих эллиптических операторов

D - оператор не удовлетворяющий условию Атьи-Ботта.

$$\begin{cases} Du=f, \\ Bj^{m-1}u=g, \quad g\in H^\delta(\partial M, G) \end{cases} \qquad L_+(D)\xrightarrow{\sigma(B)}\pi^*G$$

на $S^*(\partial M)$

$$\dim\operatorname{coker}(D,B)=\infty$$

граничные значения в подпространстве || $g\in \operatorname{Im}P\subset H^\delta(\partial M, G)$, P - псевдодифференциальный проектор

Стернин Шаталов Шульце

$$\boxed{\begin{cases} Du=f \\ Bj^{m-1}u=g, \quad g\in \operatorname{Im}P\subset H^\delta(\partial M,G) \end{cases}}$$

граничный символ

$$L_+(D)\xrightarrow{\sigma(B)}\operatorname{Im}\sigma(P)$$

на $S^*(\partial M)$

$$Ell^m(M,\partial M)=\left\{\begin{matrix}\text{классы стабильно гомотопных} \\ \text{эллиптических задач } (D,B,P)\end{matrix}\right\}$$

$\operatorname{ord}D=m$

Th (редукция к операторам первого порядка)

$$\times D_+^{m-1}: \operatorname{Spect}(M,\partial M)\to Ell^m(M,\partial M), \quad m\geq 1$$

- изоморфизм

Спектральные задачи

$D=\frac{\partial}{\partial t}+A$, A - самосопр. || P_+ - неотр. спектр. проектор для A ||

$$\begin{cases} Du=f \\ P_+u|_{\partial M}=g\in \operatorname{Im}P_+. \end{cases}$$

APS, NSSS

III Гомотопическая классификация краевых задач с условиями чётности.

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha: T^*X &\to T^*X\\ (x,\xi) &\mapsto (x,-\xi)\end{aligned}}$$

$X = \partial M$

Def $P : C^\infty(X,E) \circlearrowleft$

$\alpha^*\sigma(P) = \sigma(P)$ чётный

$\sigma(P) + \alpha^*\sigma(P) = 1_{\pi^*E}$ нечётный

$$Ell^{ev/odd}(M) = \left\{\begin{array}{l}\text{классы стабильно гомотопных}\\ \text{спектральных задач, } P_+ \text{ - чётный/нечётн.}\end{array}\right\}$$

$\underline{\text{Th}}$ $\mathrm{Ell}^{ev/odd}(M^{ev/odd})\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\xrightarrow{\chi}K_c(T^*(M\setminus\partial M))\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\oplus\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ 6

– изоморфизм

первая компонента χ (определяется главным символом)

$$(D,P_+)\xrightarrow{\text{чётн.}}\begin{cases}Du=f_1, & \alpha^*Dv=f_2\\ P_+u|_{\partial M}+(1-P_+)v|_{\partial M}=g\end{cases}\qquad \alpha^*\sigma(D)$$

$$(D,P_+)\xrightarrow{\text{нечётн.}}\begin{cases}Du=f_1, & \alpha^*D^{-1}v=f_2\\ P_+u|_{\partial M}+(1-P_+)v|_{\partial M}=g\end{cases}\qquad \alpha^*\sigma(D)^{-1}$$

классич. краевые задачи

$$\mathrm{Ell}^1(M)\simeq K_c(T^*(M\setminus\partial M))$$

вторая компонента χ (опр-ся подпространством)

$$(D,P)\longmapsto d(\operatorname{Im}P)\in\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$$

функционал размерности подпространств

$$d:\widehat{\mathrm{Even}}(X^{odd})\text{ и }\widehat{\mathrm{Odd}}(X^{ev})\to\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$$

- гомотопическая инвариантность;
- $d(\operatorname{Im}P)=\operatorname{rk}P$, для конечном. P;
- дополнительность $d(\operatorname{Im}P)+d(\operatorname{Im}(1-P))=0$.

Следствие (формула индекса)

$$\operatorname{ind}\mathcal{D}=p_!\,\chi[\mathcal{D}]\quad,\quad p:M\setminus\partial M\to pt.$$

$$\operatorname{ind}(D,P)=\frac{1}{2}\operatorname{ind}\widetilde{D}-d(\operatorname{Im}P)$$